

# ANALISI DI FOURIER

FILIPPO DE MARI

Corso di dottorato in Ingegneria Elettronica e Informatica  
Università di Genova—Anni Accademici 2002-2003 e 2003-2004

---

*Date:* maggio 2004.

## INDICE DEGLI ARGOMENTI

1. Introduzione	1
2. Serie di Fourier	5
2.1. Proiezioni ortogonali	13
2.2. Convergenze	15
2.3. Una applicazione	22
3. Misura e integrale di Lebesgue	25
3.1. Convergenza e completezza	25
3.2. L'integrale di Lebesgue	27
3.3. Gli spazi di Lebesgue	34
3.4. Serie di Fourier in $L^2$	38
4. La trasformata di Fourier	43
4.1. Espansioni e integrali di Fourier	43
4.2. Convoluzioni	44
4.3. La trasformata di Fourier in $L^1$	48
4.4. La formula di inversione e la teoria $L^2$	51
5. Distribuzioni	55
5.1. Funzioni test	57
5.2. Definizione di distribuzione	60
5.3. Operazioni sulle distribuzioni	65
5.4. Lo spazio di Schwartz	69
5.5. Distribuzioni temperate e trasformata di Fourier	72
6. Analisi in tempo-frequenza e wavelets	74
6.1. Atomi in tempo-frequenza	74
6.2. Trasformata di Fourier a finestra mobile	77
6.3. Trasformata wavelet	81
6.4. La distribuzione di Wigner.	86
Bibliografia	91

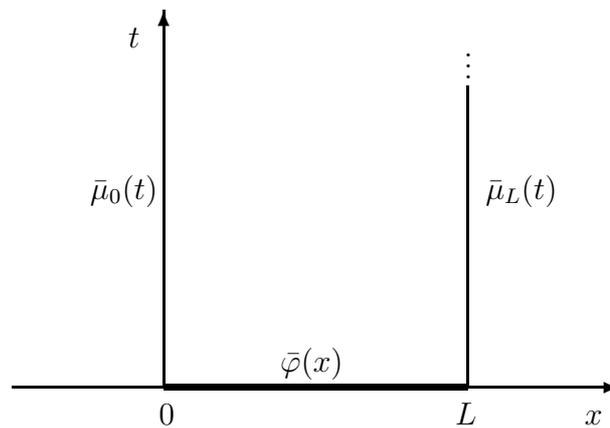
## 1. INTRODUZIONE

L'analisi di Fourier è uno strumento potente per risolvere un'ampia classe di problemi matematici, come ad esempio molte equazioni differenziali alle derivate parziali di interesse in ingegneria. L'idea fondamentale consiste nel tentare di scrivere gli oggetti in esame, tipicamente funzioni, come combinazioni dei più semplici oggetti dello stesso tipo, e di ricostruire poi le proprietà dell'oggetto composito a partire dalla conoscenza delle proprietà degli oggetti semplici e di come essi siano stati messi insieme. Uno dei problemi centrali dell'analisi di Fourier, storicamente il primo, è quello di determinare sotto quali condizioni una funzione periodica possa essere espressa come la somma (eventualmente infinita) di seni e coseni, le funzioni periodiche per antonomasia, ed in quale senso la somma rappresenti la funzione. Ci riferiamo al tipo di convergenza della serie alla funzione data, ammesso che vi sia.

Consideriamo subito un esempio concreto, il problema del flusso di calore monodimensionale: possiamo pensare ad un filo metallico di lunghezza  $L$ , isolato lungo la sua superficie laterale in modo tale che il calore possa entrare od uscire solo ai due estremi. In questo contesto non ci preoccupiamo di derivare l'equazione differenziale corretta ma rimandiamo il lettore alla letteratura fisica, secondo la quale l'evoluzione della temperatura è descritta da una funzione  $u = u(x, t)$  con  $x \in [0, L]$  e  $t \in [0, +\infty)$  che risolve il sistema

$$(P) \quad \begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t) & x \in (0, L), \quad t \in (0, +\infty) \\ u(x, 0) = \bar{\varphi}(x) & x \in [0, L] \\ u(0, t) = \bar{\mu}_0(t) & t \in (0, +\infty) \\ u(L, t) = \bar{\mu}_L(t) & t \in (0, +\infty). \end{cases}$$

Graficamente, possiamo rappresentare il problema come segue:



Dal momento che le eventuali soluzioni si presumono continue, i dati dovranno soddisfare le seguenti condizioni di compatibilità:

$$\bar{\varphi}(0) = \bar{\mu}_0(0), \quad \bar{\varphi}(L) = \bar{\mu}_L(0)$$

dove naturalmente  $\bar{\varphi}$  e  $\bar{\mu}_0, \bar{\mu}_L$  sono continue. Il problema (P) può essere decomposto in quattro problemi più semplici, nel senso che la somma (o quasi) delle soluzioni dei nuovi problemi darà luogo ad una soluzione del problema originario. Si considerino

$$(P1) \begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 & x \in (0, L), \quad t \in (0, +\infty) \\ u(x, 0) = \varphi(x) & x \in [0, L], \quad \varphi(0) = \varphi(L) = 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & t \in (0, +\infty) \end{cases}$$

$$(P2) \begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 & x \in (0, L), \quad t \in (0, +\infty) \\ u(x, 0) = 0 & x \in [0, L] \\ u(0, t) = \mu_0(t) & t \in (0, +\infty), \quad \mu_0(0) = 0 \\ u(L, t) = 0 & t \in (0, +\infty) \end{cases}$$

$$(P3) \begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 & x \in (0, L), \quad t \in (0, +\infty) \\ u(x, 0) = 0 & x \in [0, L] \\ u(0, t) = 0 & t \in (0, +\infty) \\ u(L, t) = \mu_L(t) & t \in (0, +\infty), \quad \mu_L(0) = 0 \end{cases}$$

$$(P4) \begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t) & x \in (0, L), \quad t \in (0, +\infty) \\ u(x, 0) = 0 & x \in [0, L] \\ u(0, t) = 0 & t \in (0, +\infty) \\ u(L, t) = 0 & t \in (0, +\infty). \end{cases}$$

Se poniamo:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \bar{\varphi}(x) - \left( \bar{\mu}_0(0) + \frac{x}{L}(\bar{\mu}_L(0) - \bar{\mu}_0(0)) \right) \\ \mu_0(t) &= \bar{\mu}_0(t) - \bar{\mu}_0(0) \\ \mu_L(t) &= \bar{\mu}_L(t) - \bar{\mu}_L(0), \end{aligned}$$

le condizioni  $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$ ,  $\mu_0(0) = 0$  e  $\mu_L(0) = 0$  sono soddisfatte, cosicché se  $u_j$  è una soluzione di (PJ), con  $J = 1, 2, 3, 4$ , allora

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \left( \bar{\mu}_0(0) + \frac{x}{L}(\bar{\mu}_L(0) - \bar{\mu}_0(0)) \right)$$

risolve il problema (P); esso può quindi dirsi risolto se lo sono i problemi (PJ). Operiamo il cambio di variabili

$$\begin{cases} x' = \frac{x\pi}{L} \\ t' = \frac{a^2\pi^2 t}{L^2}, \end{cases}$$

per modo che si può assumere  $a = 1$  e  $L = \pi$ , come si verifica subito.

La soluzione completa dei problemi (P2), (P3) e (P4) sarà presentata più avanti, nella Sezione 2.3. Ci limitiamo per ora ad affrontare (P1), che riscriviamo

$$(1.1) \quad \begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in (0, \pi), \quad t \in (0, +\infty) \\ u(x, 0) = \varphi(x) & x \in [0, \pi], \quad \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & t \in (0, +\infty) \end{cases}$$

con  $\varphi$  continua, liscia a tratti su  $[0, \pi]^1$  e tale che  $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$ . Proveremo l'esistenza di una soluzione di (1.1) mediante il cosiddetto metodo della **separazione delle variabili**. Esso conduce in modo naturale a considerare sviluppi in serie di soli seni di  $\varphi$  sull'intervallo  $[-\pi, \pi]$ , un prototipo importantissimo di serie di Fourier (ossia di serie dispari). Separare le variabili significa cercare soluzioni del tipo

$$u(x, t) = f(x)g(t),$$

con  $f$  e  $g$  non identicamente nulle. Poiché in tal caso

$$u_t = fg', \quad u_{xx} = f''g,$$

$u$  soddisfa l'equazione del calore se e solo se  $fg' = f''g$ . In ogni punto  $(x, t)$  dove  $f(x)g(t) \neq 0$  l'equazione appena scritta diviene

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{f''(x)}{f(x)} = \text{costante},$$

in quanto il primo rapporto è funzione della sola  $t$  ed il secondo della sola  $x$ . Vediamo ora che la costante in esame può essere scritta come  $-\lambda^2$ . In effetti, dal momento che le condizioni

$$u(0, t) = f(0)g(t) = 0, \quad u(\pi, t) = f(\pi)g(t) = 0$$

con  $g$  non identicamente nulla implicano  $f(0) = f(\pi) = 0$ , abbiamo

$$\begin{aligned} \text{costante} \left( \int_0^\pi f(x)^2 dx \right) &= \int_0^\pi f(x)f''(x) dx \\ &= f'(x)f(x) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi f'(x)f'(x) dx \\ &= f'(\pi)f(\pi) - f'(0)f(0) - \int_0^\pi (f'(x))^2 dx \\ &= - \int_0^\pi (f'(x))^2 dx < 0. \end{aligned}$$

Consideriamo allora il problema

$$\begin{cases} f''(x) = -\lambda^2 f(x), & x \in [0, \pi] \\ f(0) = f(\pi) = 0. \end{cases}$$

Esso ha soluzione non banale solo per  $\lambda^2 = n^2$ , con  $n$  intero. Infatti, l'integrale generale di  $f'' = \lambda f$  è

$$\{k_1 \cos(\lambda x) + k_2 \sin(\lambda x) : k_1, k_2 \in \mathbb{R}\}$$

---

<sup>1</sup>Per la nozione precisa di funzione liscia a tratti si veda la Definizione 2.8. Si pensi ad una funzione il cui grafico è quello di una funzione derivabile tranne al più un numero finito di "spigoli".

e le condizioni al bordo implicano  $0 = f(0) = k_1$ ,  $0 = f(\pi) = k_2 \sin(\lambda\pi)$ . Siccome  $k_2$  non può essere zero perché altrimenti si avrebbe  $f \equiv 0$ , necessariamente  $\lambda \in \mathbb{Z}$ . In ultima analisi

$$f(x) = k \sin(nx), \quad k \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Posto quindi  $\lambda = n$ , l'equazione differenziale per  $g$  diviene

$$g'(t) = -n^2 g(t).$$

Ignorando per il momento le condizioni iniziali  $u(x, 0) = f(x)g(0) = \varphi(x)$ , scriviamo

$$g(t) = h e^{-n^2 t}, \quad h \in \mathbb{R}.$$

Ricostruendo il prodotto, abbiamo quindi per ogni intero  $n \in \mathbb{Z}$  una soluzione del tipo

$$c_n e^{-n^2 t} \sin(nx)$$

che soddisfa le condizioni al bordo  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$  per ogni  $t \in (0, +\infty)$ . Per sovrapposizione (l'equazione del calore è lineare) possiamo dire che ogni somma finita di soluzioni del tipo trovato sarà ancora una soluzione. Ciò conduce a considerare, almeno formalmente, la serie

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-n^2 t} \sin(nx) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n - c_{-n}) e^{-n^2 t} \sin(nx) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin(nx) \\ &=: \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x, t). \end{aligned}$$

A questo punto teniamo conto del dato iniziale. Imponendo  $u(x, 0) = \varphi(x)$  otteniamo

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx),$$

ossia uno sviluppo in serie di seni per il dato  $\varphi(x)$ . Come vedremo tra breve,  $b_n$  è il coefficiente di Fourier di  $\varphi$  estesa in modo dispari all'intervallo  $[-\pi, \pi]$ , ossia

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(s) \sin(ns) ds.$$

Il ragionamento formale svolto sin qui andrà confortato da una dimostrazione sulle convergenze implicite nei passaggi precedenti.

## 2. SERIE DI FOURIER

Una serie di Fourier è un'espressione del tipo

$$(2.1) \quad \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

oppure del tipo

$$(2.2) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}.$$

Le due serie sono in effetti la medesima serie scritta in due modi diversi, come si evince dalle ben note formule:

$$(2.3) \quad \cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \quad \sin \theta = \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

$$(2.4) \quad e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Se convergenti puntualmente, le serie (2.1) e (2.2) rappresentano evidentemente funzioni periodiche di periodo  $2\pi$ . La domanda cui la teoria delle serie di Fourier vuole rispondere è la seguente: sotto quali ipotesi una funzione  $f$  periodica di periodo  $2\pi$  è rappresentabile mediante una serie del tipo (2.1) oppure (2.2) e in quale senso tale serie rappresenta  $f$ ? La prima risposta è fornita dalla seguente condizione necessaria.

**Teorema 2.1.** *Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione periodica di periodo  $2\pi$  e supponiamo che*

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

dove le serie convergono uniformemente.<sup>2</sup> Allora

$$(2.5) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx,$$

$$(2.6) \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Poiché le funzioni  $x \mapsto c_n e^{i(n-k)x}$  sono continue per ogni coppia di interi non-negativi  $n$  e  $k$ , e poiché per ipotesi la serie

$$e^{-ikx} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i(n-k)x}$$

converge uniformemente, allora è lecito integrare termine a termine, ossia

$$\int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \int_0^{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} e^{-ikx} dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)x} dx.$$

D'altra parte, se  $n - k \neq 0$

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-k)x} dx = \frac{1}{i(n-k)} e^{i(n-k)x} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{i(n-k)} (e^{i(n-k)2\pi} - 1) = 0,$$

<sup>2</sup>La convergenza di una serie del tipo  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k$  è da intendersi come il limite delle somme parziali simmetriche, cioè  $S_N = \sum_{k=-N}^{+N} a_k$ .

mentre se  $n - k = 0$

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-k)x} dx = \int_0^{2\pi} 1 dx = 2\pi.$$

Quindi

$$\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx} dx = 2\pi c_k,$$

ossia la (2.6). Infine, dall'ipotesi e da (2.3) otteniamo l'uguaglianza

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \\ &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ a_n \frac{1}{2} (e^{inx} + e^{-inx}) + b_n \frac{1}{2i} (e^{inx} - e^{-inx}) \right] \\ &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ e^{inx} \frac{1}{2} (a_n - ib_n) + e^{-inx} \frac{1}{2} (a_n + ib_n) \right] \end{aligned}$$

Ne seguono le formule  $c_0 = \frac{1}{2}a_0$ ,  $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ ,  $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$  per  $n = 1, 2, 3, \dots$ , da cui si ricava

$$\begin{cases} a_0 = 2c_0 \\ a_n = c_n + c_{-n} \quad \text{se } n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad \begin{cases} b_0 = 0 \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) \quad \text{se } n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

ossia (2.5). □

Nella dimostrazione precedente, l'ipotesi di convergenza uniforme è sostituibile da qualunque altra ipotesi che garantisca di poter integrare per serie.

I numeri definiti da (2.5) ovvero da (2.6) si chiamano i **coefficienti di Fourier** di  $f$  e la serie corrispondente (2.1), ovvero (2.2), si chiama la **serie di Fourier** di  $f$ . I coefficienti di Fourier sono ben definiti ogniqualvolta  $f$  è una funzione periodica di periodo  $2\pi$  e integrabile secondo Riemann su  $[0, 2\pi]$ . In tal caso possiamo considerare la serie di Fourier di  $f$ , indipendentemente dal fatto che essa converga o meno. Sarà un problema della teoria stabilire se ed in che modo la serie di Fourier di  $f$  converge.

**Lemma 2.2.** *Se  $f$  è periodica di periodo  $p$ , allora  $\int_a^{a+p} f(x) dx$  è indipendente da  $a$ .*

DIMOSTRAZIONE. Sia

$$g(a) = \int_a^{a+p} f(x) dx = \int_0^{a+p} f(x) dx - \int_0^a f(x) dx.$$

Per il teorema fondamentale del calcolo si ha  $g'(a) = f(p+a) - f(a)$  e poiché  $f$  è periodica di periodo  $p$ ,  $g'$  è identicamente nulla e quindi  $g$  è costante su  $\mathbb{R}$ , come volevasi. □

In virtù del lemma precedente, d'ora in avanti considereremo funzioni definite su intervalli di lunghezza  $2\pi$  e prolungate periodicamente sull'asse reale, senza ulteriori commenti riguardanti gli intervalli di integrazione. Adotteremo inoltre la convenzione, già implicitamente adottata sinora, che le funzioni considerate saranno tutte **funzioni a valori complessi**.

Un'altra conseguenza del Lemma 2.2 consiste in una interpretazione importante del termine costante della serie di Fourier:

**Lemma 2.3.** *Il termine costante della serie di Fourier di una funzione  $f$  periodica di periodo  $2\pi$  è la media di  $f$  su un qualunque intervallo di lunghezza  $2\pi$ .*

DIMOSTRAZIONE. In effetti il termine costante è  $c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) dx$ .  $\square$

La serie di Fourier rispetta la parità di una funzione, nel senso del lemma che segue.

**Lemma 2.4.** *Sia  $f$  periodica di periodo  $2\pi$ .*

- (i) *Se  $f$  è pari allora  $b_n = 0$ , mentre  $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx$  per ogni  $n$ ;*  
 (ii) *Se  $f$  è dispari allora  $a_n = 0$ , mentre  $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx$  per ogni  $n$ .*

DIMOSTRAZIONE. L'asserto segue dalla seguente semplice applicazione del Lemma 2.2:

$$\int_0^{2\pi} F(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^\pi F(x) dx & \text{se } F \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } F \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Perciò, se  $f$  è pari tale è  $f(x) \cos(nx)$ , mentre  $f(x) \sin(nx)$  è dispari, e se viceversa  $f$  è dispari tale è  $f(x) \cos(nx)$ , mentre  $f(x) \sin(nx)$  è pari.  $\square$

In particolare, la serie di Fourier di una funzione pari sarà una serie di soli coseni mentre quella di una funzione dispari sarà una serie di soli seni.

### Esempio 2.5.

Consideriamo la funzione  $2\pi$ -periodica definita da  $f(x) = |x|$  per  $x \in [-\pi, \pi]$ , ed estesa poi per periodicità. Siccome  $f$  è pari, la sua serie di Fourier sarà una serie di soli coseni, con coefficienti:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos(nx) dx.$$

Quindi,

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x dx = \frac{1}{\pi} x^2 \Big|_0^\pi = \pi,$$

e per ogni  $n > 0$  un'integrazione per parti fornisce

$$a_n = \frac{2}{\pi} \frac{x \sin(nx)}{n} \Big|_0^\pi - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n} dx = \frac{2 \cos(nx)}{\pi n^2} \Big|_0^\pi = \frac{2(-1)^n - 1}{\pi n^2},$$

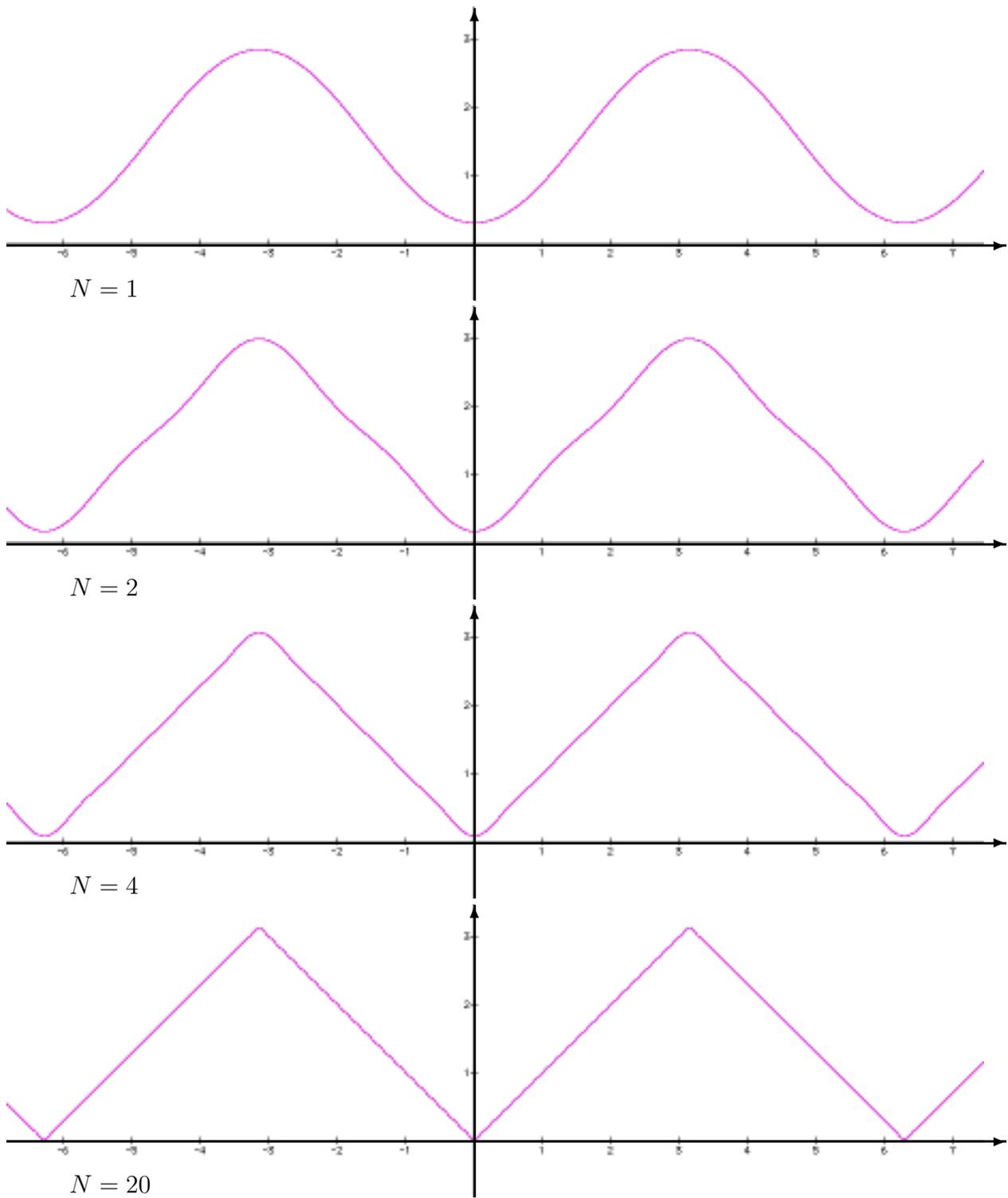
ossia

$$a_n = \begin{cases} -4/\pi n^2 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è pari.} \end{cases}$$

In conclusione, la serie di Fourier di  $f$  è

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^2} \cos(nx) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}.$$

È immediato verificare che la serie converge, utilizzando il criterio del confronto: la serie è dominata dalla serie convergente  $\sum 1/n^2$ .



In figura sono raffigurate le somme parziali  $S_N = \sum_{k=1}^N a_k \cos(kx)$  di  $f(x) = |x|$ , per  $N = 1, 2, 4, 20$ .

**Esempio 2.6.**

Consideriamo ora la funzione  $2\pi$ -periodica definita da  $f(x) = x$  per  $x \in [-\pi, \pi]$ , estesa per periodicità. Potremmo argomentare come nel caso precedente e calcolarci lo sviluppo in serie di soli seni, visto che  $f$  è una funzione dispari. Per mostrare l'utilizzo degli esponenziali complessi, calcoliamo invece i coefficienti  $c_n$ . Per  $n = 0$  abbiamo

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \, dx = 0,$$

mentre per  $n \neq 0$  integriamo per parti, ottenendo

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} \, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{x e^{-inx}}{(-in)} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{(-in)} \, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(-in)} [\pi(-1)^n - (-\pi)(-1)^n] - \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-inx}}{(-n^2)} \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{in}, \end{aligned}$$

siccome  $e^{-in\pi} = e^{in\pi} = (-1)^n$ . Pertanto la serie di Fourier di  $f$  è

$$\sum_{n \neq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{in} e^{inx}.$$

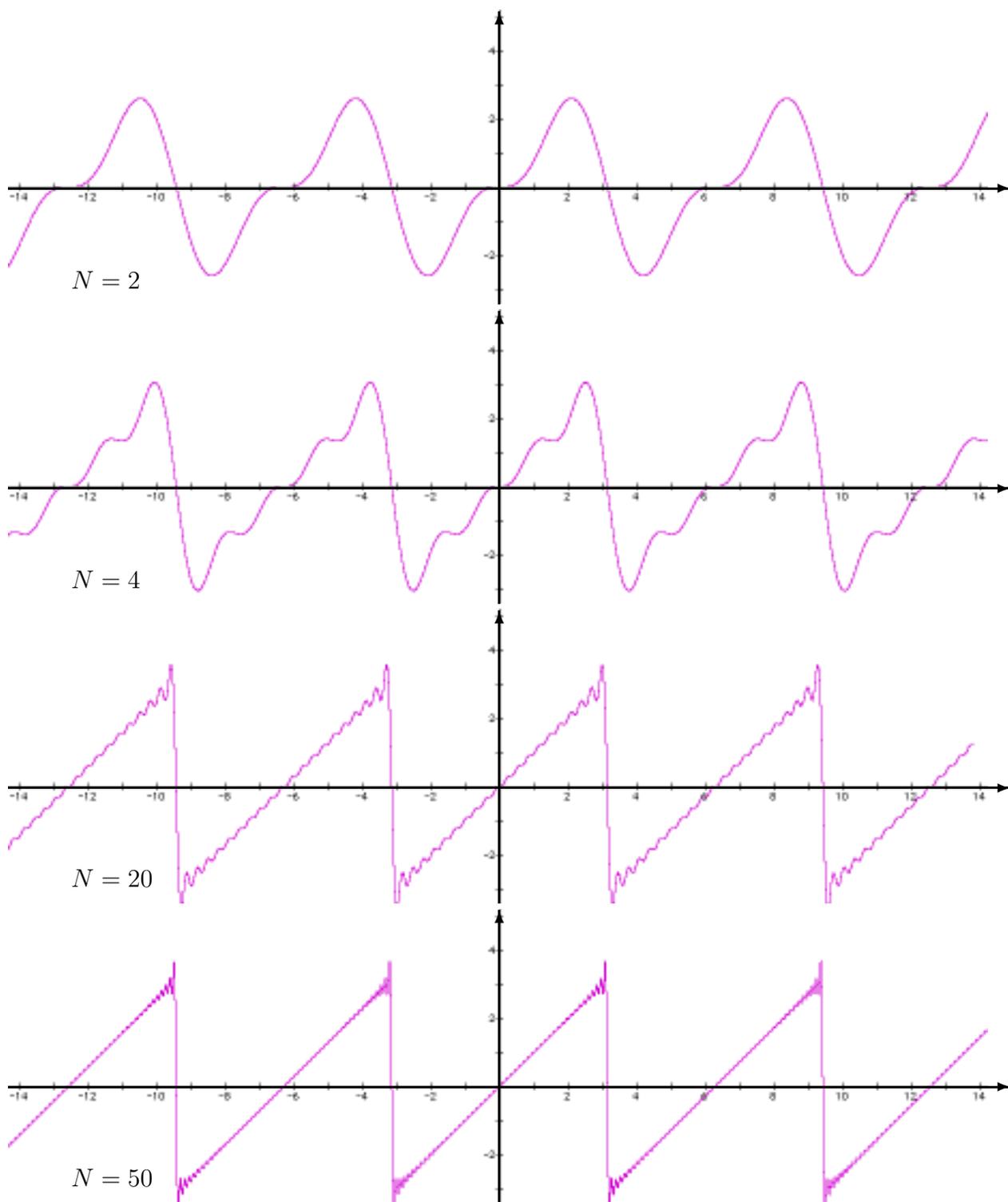
Sommando i termini corrispondenti a  $n$  e  $-n$ , otteniamo

$$(-1)^{n+1} \left( \frac{e^{inx}}{in} + \frac{e^{-inx}}{(-in)} \right) = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx),$$

cosicché la serie di soli seni di  $f$  diviene

$$2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx).$$

I grafici delle somme parziali  $S_N$  sono mostrati nella pagina seguente per  $N = 2, 4, 20, 50$ . Si vede che l'approssimazione è buona lontano dai punti di discontinuità  $\{(2k-1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ , ma in corrispondenza di essi si verifica un fenomeno noto come il **fenomeno di Gibbs**: aggiungendo termini si creano picchi che non tendono a scomparire in altezza. Per una approfondita discussione si veda ad esempio [EP].



**Esercizi.**

1. Provare che valgono i seguenti sviluppi in serie di Fourier. A sinistra è indicata la funzione, a destra lo sviluppo.

$$\begin{array}{ll}
 f(x) = \pi - x, & x \in [0, 2\pi], & 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \\
 f(x) = (\sin x)^2, & x \in [-\pi, \pi], & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x) \\
 f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \leq \pi, \end{cases} & & \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1} \\
 f(x) = |\sin x|, & x \in [-\pi, \pi], & \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2-1} \\
 f(x) = |\cos x|, & x \in [-\pi, \pi], & \frac{2}{\pi} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(2nx)}{4n^2-1} \\
 f(x) = \begin{cases} (2a)^{-1} & |x| < a < \pi \\ 0 & a < |x| \leq \pi, \end{cases} & & \frac{1}{2\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(na)}{na} \cos(nx) \\
 f(x) = x^2, & x \in [-\pi, \pi], & \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx) \\
 f(x) = e^{bx}, & x \in [-\pi, \pi], & \frac{\sinh b\pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{b-in} e^{inx}
 \end{array}$$

**Teorema 2.7** (Diseguaglianza di Bessel I). *Sia  $f$  integrabile secondo Riemann in  $[-\pi, \pi]$  e periodica di periodo  $2\pi$ . Vale allora la seguente diseguaglianza:*

$$(2.7) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché  $|z|^2 = z\bar{z}$  per ogni numero complesso  $z$ , abbiamo

$$\begin{aligned}
 \left| f(x) - \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \right|^2 &= \left( f(x) - \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \right) \left( \overline{f(x)} - \sum_{n=-N}^N \bar{c}_n e^{-inx} \right) \\
 &= |f(x)|^2 - \sum_{n=-N}^N \left[ c_n \overline{f(x)} e^{inx} + \bar{c}_n f(x) e^{-inx} \right] + \sum_{m,n=-N}^N c_m \bar{c}_n e^{i(m-n)x}.
 \end{aligned}$$

Dividiamo entrambi i membri per  $2\pi$ , integriamo tra  $-\pi$  e  $\pi$ , utilizziamo la formula

$$(2.8) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} dx = \delta_{m,n},$$

e la definizione dei coefficienti di Fourier, ottenendo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \right|^2 dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - \sum_{n=-N}^N [c_n \bar{c}_n + \bar{c}_n c_n] + \sum_{n=-N}^N c_n \bar{c}_n \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - \sum_{n=-N}^N |c_n|^2. \end{aligned}$$

Poiché il membro sinistro di questa uguaglianza è non-negativo, avremo

$$\sum_{n=-N}^N |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

per ogni intero positivo  $N$ . Passando al limite per  $N \rightarrow +\infty$  la disuguaglianza si conserva, come volevasi.  $\square$

Naturalmente esiste una versione di (2.7) per i coefficienti  $a_n$  e  $b_n$ . In effetti si dimostra immediatamente che

$$|a_0|^2 = 4|c_0|^2, \quad |a_n|^2 + |b_n|^2 = 2(|c_n|^2 + |c_{-n}|^2),$$

cosicché

$$(2.9) \quad \frac{1}{4}|a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Concludiamo questa sezione introducendo e alcuni spazi di funzioni a cui faremo riferimento in seguito.

**Definizione 2.8.** (i) Se  $I$  è un intervallo chiuso  $I = [a, b]$ , indicheremo con  $C(I)$  lo spazio delle funzioni continue su  $I$ .

(ii) Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ . Diremo che  $f$  è continua a tratti su  $[a, b]$  se essa è continua in tutti i punti di  $[a, b]$  tranne al più un numero finito di essi in cui esistono finiti il limite sinistro e il limite destro. Si richiede in particolare che esistano finiti i limiti

$$f(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \quad f(b^-) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x).$$

In pratica,  $f$  è continua tranne al più per un numero finito di discontinuità a salto. Lo spazio di tutte le funzioni continue a tratti su  $[a, b]$  si denota  $PC([a, b])$ .

(iii) Diremo che una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  è liscia a tratti su  $[a, b]$  se  $f$  e  $f'$  sono entrambe in  $PC([a, b])$ , ossia se  $f'$  esiste ed è continua in ogni punto di  $(a, b)$  tranne al più un numero finito di punti (ove essa non esiste oppure esiste e non è continua) nei quali ammette in ogni caso limiti destro e sinistro finiti. Si intende inoltre che

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad f'(b) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$$

esistano entrambe in  $\mathbb{R}$ . Lo spazio di tutte le funzioni lisce a tratti su  $[a, b]$  si denota  $PS([a, b])$ .

(iv) Diremo che  $f$  è liscia a tratti su  $\mathbb{R}$  se lo è su ogni intervallo  $[a, b]$ . Lo spazio delle funzioni lisce a tratti verrà indicato semplicemente con  $PS(\mathbb{R})$ . Quindi una funzione in  $PS(\mathbb{R})$  può avere infiniti punti di discontinuità (a salto), ma ne ha però un numero finito in ogni intervallo limitato.

Alle volte può essere utile considerare spazi di funzioni **regolarizzate**. Diremo che  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  è regolarizzata in  $x_0 \in (a, b)$  se esistono

$$f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), \quad f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

e se si ha

$$(2.10) \quad f(x_0) = \frac{1}{2} [f(x_0^-) + f(x_0^+)].$$

Solitamente denoteremo con  $\tilde{V}$  l'insieme di funzioni che si ottiene dall'insieme  $V$  regolarizzandone gli elementi, qualora ciò sia possibile.

### Esercizi.

**2.** Per ciascuna delle seguenti funzioni stabilire se esse appartengono a  $C([a, b])$ ,  $PC([a, b])$ ,  $PS([a, b])$  oppure a nessuno di essi.

- (i)  $f(x) = \csc(x)$ ;
- (ii)  $f(x) = (\sin x)^{1/3}$ ;
- (iii)  $f(x) = (\sin x)^{4/3}$ ;

$$(iv) \quad f(x) = \begin{cases} \cos x & x > 0 \\ -\cos x & x \leq 0 \end{cases};$$

$$(v) \quad f(x) = \begin{cases} \sin x & x > 0 \\ \sin 2x & x \leq 0 \end{cases};$$

$$(vi) \quad f(x) = \begin{cases} (\sin x)^{1/5} & x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

**2.1. Proiezioni ortogonali.** È facile provare che l'integrale

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

definisce un prodotto scalare (Hermitiano) su  $\widetilde{PC}([0, 2\pi])$ , ossia lo spazio che si ottiene regolarizzando le funzioni continue a tratti, nel senso discusso dopo la Definizione (2.10). L'unico punto non banale da verificare è che se  $\langle f, f \rangle = 0$  allora  $f = 0$ . Scriveremo

$$(2.11) \quad \|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left( \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad f \in \widetilde{PC}([0, 2\pi])$$

detta la **norma quadratica** di  $f$ . Ricordiamo che se  $V$  è uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare Hermitiano  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , un insieme  $e_0, e_1, e_2, \dots$  si dice **sistema**

**ortonormale** se

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Ricordiamo inoltre che se  $W$  è un sottospazio di dimensione finita di  $V$  e se  $x \in V$ , esiste allora un unico elemento  $p_W(x) \in W$ , detto la **proiezione ortogonale** di  $x$  su  $W$ , tale che  $x - p_W(x)$  è ortogonale ad ogni elemento di  $W$ . Se  $\{e_1, \dots, e_n\}$  è una base ortonormale di  $W$  allora

$$(2.12) \quad p_W(x) = \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle e_j.$$

Infine,  $p_W(x)$  è l'unico elemento di  $W$  avente distanza minima da  $x$  e

$$(2.13) \quad \|p_W(x) - x\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle^2.$$

La teoria delle serie di Fourier ammette una concettualizzazione di tipo geometrico che fa uso delle nozioni appena ricordate: essa consente di vedere le ridotte di una serie di Fourier come le proiezioni su sottospazi di dimensione via via crescente, costituiti cioè da sovrapposizioni di seni e coseni con frequenze via via maggiori. Una sovrapposizione di questo tipo, ossia una somma

$$(2.14) \quad P(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

si chiama **polinomio trigonometrico**. Il più grande intero  $N$  per il quale uno tra  $a_N$  e  $b_N$  non è zero si chiama il grado di  $P$ . Il motivo per introdurre i polinomi trigonometrici è evidente: denotato con  $\mathcal{P}_N$  lo spazio vettoriale di tutti i polinomi trigonometrici, la ridotta  $N$ -esima di una serie di Fourier appartiene a  $\mathcal{P}_N$ . Per una opportuna classe di funzioni, essa è proprio la proiezione ortogonale su  $\mathcal{P}_N$ .

**Proposizione 2.9.** *Le funzioni*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

*formano un sistema ortonormale in  $\widetilde{PC}([0, 2\pi])$ . La proiezione ortogonale su  $\mathcal{P}_N$  di  $f \in \widetilde{PC}([0, 2\pi])$  è il polinomio trigonometrico*

$$S_N(f; x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

*dove  $\{a_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ ,  $\{b_n : n = 1, 2, \dots\}$  sono i coefficienti di Fourier di  $f$ . Inoltre*

$$(2.15) \quad \|f - S_N(f; \cdot)\|_2^2 = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx - \pi \left( \frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{j=1}^N (|a_j|^2 + |b_j|^2) \right).$$

DIMOSTRAZIONE. Il fatto che le funzioni in esame formino un sistema ortonormale è conseguenza di un facile esercizio sull'integrazione per parti (si veda l'Esercizio (5) che segue). Ponendo  $W = \mathcal{P}_N$  e utilizzando la formula (2.12) per la proiezione, otteniamo

$$\begin{aligned} p_W(f) &= \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ &+ \sum_{n=1}^N \left( \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(n\cdot) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) + \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(n\cdot) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \\ &+ \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \right] \cos(nx) + \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx \right] \sin(nx) \right) \\ &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)). \end{aligned}$$

Infine, la (2.15) è immediata conseguenza di (2.13) e del calcolo appena fatto, in quanto

$$\left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \sqrt{\frac{\pi}{2}} a_0, \quad \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(n\cdot) \right\rangle = \sqrt{\pi} a_n, \quad \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(n\cdot) \right\rangle = \sqrt{\pi} b_n.$$

Questo conclude la dimostrazione.  $\square$

Naturalmente, (2.9) è una conseguenza diretta di (2.15).

### Esercizi.

3. Provare che l'integrale  $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$  definisce un prodotto scalare Hermitiano su  $\widetilde{PC}([0, 2\pi])$ . È vero che se  $f \in PC([a, b])$  è tale che  $\langle f, f \rangle = 0$  allora  $f = 0$ ?

4. Provare le formule (2.12) e (2.13).

5. Provare le seguenti formule:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin(nx) dx &= \int_0^{2\pi} \cos(nx) dx = 0, & n = 1, 2, 3, \dots \\ \int_0^{2\pi} \sin^2(nx) dx &= \int_0^{2\pi} \cos^2(nx) dx = \pi, & n = 1, 2, 3, \dots \\ \int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx &= \int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = 0, & n \neq m \\ \int_0^{2\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx &= 0, & n, m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

2.2. **Convergenze.** Ci preoccupiamo ora di stabilire a quali condizioni ed in che senso le somme parziali

$$(2.16) \quad S_N(f; x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$$

convergono. Osserviamo preliminarmente che inserendo la definizione dei coefficienti di Fourier in (2.16) si ottiene

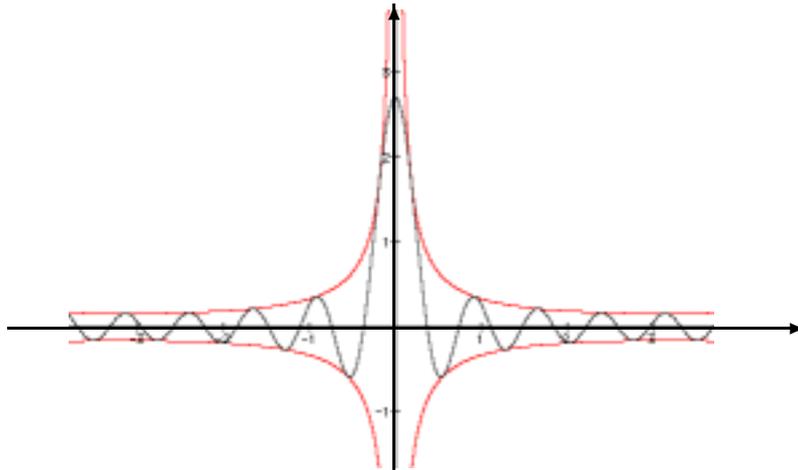
$$\begin{aligned}
 S_N(f; x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{in(x-y)} dy \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^N \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{ik(y-x)} dy \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^N \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(t+x) e^{ikt} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^N \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) e^{ikt} dt \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) D_N(t) dt,
 \end{aligned}$$

ove evidentemente

$$(2.17) \quad D_N(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N e^{inx}.$$

La funzione  $D_N(x)$  si chiama l'ennesimo **nucleo di Dirichlet**. La formula appena trovata può essere espressa in un modo leggermente diverso, tenendo conto della parità di  $D_N$ , della periodicità sia di  $f$  sia di  $D_N$  e del Lemma 2.2:

$$(2.18) \quad S_N(f; x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) D_N(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x-t) dt$$



In figura è indicato il nucleo di Dirichlet  $D_8(x)$  insieme agli involucri  $\pm \frac{1}{2\pi} \csc\left(\frac{1}{2}x\right)$ .

**Lemma 2.10.** *Per ogni intero non-negativo  $N$  vale la formula*

$$(2.19) \quad D_N(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin((N + \frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{1}{2}x)}.$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo innanzitutto che

$$(2.20) \quad \begin{aligned} D_N(x) &= \frac{1}{2\pi} e^{-iNx} (1 + e^{ix} + e^{i2x} + \dots + e^{i2Nx}) \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-iNx} \sum_{k=0}^{2N} (e^{ix})^k \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-iNx} \frac{e^{i(2N+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(N+1)x} - e^{-iNx}}{e^{ix} - 1}. \end{aligned}$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per  $e^{-ix/2}$  otteniamo infine

$$D_N(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})x} - e^{-i(N+\frac{1}{2})x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin((N + \frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{1}{2}x)},$$

come volevasi.  $\square$

**Teorema 2.11** (Convergenza puntuale). *Se  $f \in PS(\mathbb{R})$  è periodica di periodo  $2\pi$ ,*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(f; x) = \frac{1}{2} [f(x^-) + f(x^+)]$$

*per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . In particolare la serie di Fourier di  $f$  converge puntualmente ad  $f$  in ogni punto di continuità di  $f$ .*

DIMOSTRAZIONE. Non è difficile provare che per ogni intero  $N$

$$\int_{-\pi}^0 D_N(y) dy = \int_0^{\pi} D_N(y) dy = \frac{1}{2}$$

(si veda l'esercizio (7) in fondo a questa sezione). Da essa segue

$$\frac{1}{2} f(x^-) = f(x^-) \int_{-\pi}^0 D_N(y) dy, \quad \frac{1}{2} f(x^+) = f(x^+) \int_0^{\pi} D_N(y) dy$$

e quindi, in virtù della prima eguaglianza in (2.18) otteniamo

$$(2.21) \quad \begin{aligned} &S_N(f; x) - \frac{1}{2} [f(x^-) + f(x^+)] \\ &= \int_{-\pi}^0 [f(y+x) - f(x^-)] D_N(y) dy + \int_0^{\pi} [f(y+x) - f(x^+)] D_N(y) dy. \end{aligned}$$

Proveremo ora che questa differenza tende a zero per  $N \rightarrow +\infty$ . Sia

$$g(y) = \begin{cases} \frac{f(y+x) - f(x^-)}{e^{iy} - 1} & x \in [-\pi, 0) \\ \frac{f(y+x) - f(x^+)}{e^{iy} - 1} & x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Si osservi che  $g$  è definita in  $[\pi, \pi] \setminus \{0\}$ . D'altra parte, anche se il denominatore tende a zero per  $y \rightarrow 0^\pm$ , dal teorema di L'Hôpital abbiamo

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} g(y) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(y+x) - f(x^-)}{e^{iy} - 1} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f'(y+x)}{ie^{iy}} = \frac{f'(x^+)}{i}$$

e similmente  $g(y) \rightarrow f'(x^-)/i$  per  $y \rightarrow 0^-$ . Quindi  $g$  è continua a tratti su  $[-\pi, \pi]$  e in particolare è integrabile secondo Riemann in  $[-\pi, \pi]$ . Vale allora per essa la disuguaglianza di Bessel (2.7), cosicché i coefficienti di Fourier (2.6) di  $g$ , che denoteremo  $\hat{g}(N)$ , tendono a zero per  $N \rightarrow \pm\infty$ : infatti,  $|\hat{g}(N)|^2 + |\hat{g}(-N)|^2$  è il termine generale di una serie convergente. Utilizzando la formula chiusa (2.20) per il nucleo di Dirichlet, il membro destro di (2.21) soddisfa

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) (e^{i(N+1)y} - e^{-iNy}) dy = \hat{g}(-N-1) - \hat{g}(N) \rightarrow 0 \quad \text{per } N \rightarrow +\infty,$$

che è quanto si voleva provare.  $\square$

**Corollario 2.12.** *Se  $f, g \in \widetilde{PS}(\mathbb{R})$  sono periodiche di periodo  $2\pi$  ed hanno gli stessi coefficienti di Fourier, allora  $f = g$ .*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $f$  sia  $g$  coincidono con la somma della stessa serie di Fourier.  $\square$

### Esercizi.

6. Provare che:

- (i)  $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2} = |x|$  per  $x \in [-\pi, \pi]$  e quindi
- (ii)  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$
- (iii)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) = \frac{x}{2}$  per  $x \in (-\pi, \pi)$  e quindi
- (iv)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$

7. Provare che:  $\int_{-\pi}^0 D_N(y) dy = \int_0^{\pi} D_N(y) dy = \frac{1}{2}$  per ogni intero  $N$ .

8. Con riferimento all'esercizio (1), provare che:

- (i)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}$ ;
- (ii)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} = \frac{\pi - 2}{4}$ ;
- (iii)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ;

$$(iv) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12};$$

9. Provare che per ogni intero non-negativo  $N$  e per  $x \in (0, \pi)$  valgono le disuguaglianze

$$-\frac{1}{2\pi} \operatorname{csc}\left(\frac{1}{2}x\right) \leq D_N(x) \leq \frac{1}{2\pi} \operatorname{csc}\left(\frac{1}{2}x\right).$$

Ci occupiamo ora di provare le relazioni tra le derivate e gli integrali di una funzione e le corrispondenti serie di Fourier. Lo strumento essenziale a questo riguardo è il teorema fondamentale del calcolo, che vale per le funzioni continue e lisce a tratti.

**Teorema 2.13** (Teorema fondamentale del calcolo). *Sia  $f \in C([a, b]) \cap PS([a, b])$ . Allora*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt.$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché  $f \in PS([a, b])$ , esisterà al più un numero finito di punti di  $(a, b)$  in cui  $f$  non è derivabile: siano essi  $c_1, \dots, c_n$  e siano inoltre  $a = c_0$  e  $b = c_{n+1}$ . Poiché in ogni intervallo  $(c_j, c_{j+1})$  con  $j = 0, \dots, n$  la derivata  $f'$  è continua ed ammette limiti finiti ai bordi, e poiché  $f$  è continua in  $[a, b]$ , abbiamo

$$\int_a^b f'(t) dt = \sum_{j=0}^n \int_{c_j}^{c_{j+1}} f'(t) dt = \sum_{j=0}^n (f(c_{j+1}) - f(c_j)) = f(b) - f(a),$$

come volevasi.  $\square$

Si osservi che dal teorema precedente seguono, per le funzioni continue e lisce a tratti, tutti i risultati che seguono per le funzioni derivabili dal teorema fondamentale del calcolo. In particolare, la formula di integrazione per parti resta valida per questa classe di funzioni. Il teorema fondamentale del calcolo vale per una classe ancora più ampia di funzioni, le funzioni *assolutamente continue con derivata integrabile secondo Lebesgue* (si veda [R1]). Alcuni dei teoremi che seguono possono pertanto essere generalizzati a tale classe di funzioni.

**Teorema 2.14.** *Sia  $f \in C(\mathbb{R}) \cap PS(\mathbb{R})$  periodica di periodo  $2\pi$  e siano  $a_n, b_n$  e  $c_n$  i suoi coefficienti di Fourier. Siano inoltre  $a'_n, b'_n$  e  $c'_n$  i coefficienti di Fourier di  $f'$ . Allora:*

$$a'_n = nb_n, \quad b'_n = -na_n, \quad c'_n = inc_n.$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la terza relazione. Una semplice integrazione per parti fornisce

$$c'_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} f(t)e^{-int} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (-ine^{-int}) dt$$

e siccome sia  $t \mapsto f(t)$  sia  $t \mapsto e^{-int}$  sono periodiche di periodo  $2\pi$ , il termine di bordo si annulla e l'integrale rimasto è precisamente  $inc_n$ . Le formule relative a  $a_n$  e  $b_n$  si provano in modo analogo.  $\square$

**Teorema 2.15** (Serie di Fourier della derivata). *Sia  $f \in C(\mathbb{R}) \cap PS(\mathbb{R})$  periodica di periodo  $2\pi$  e supponiamo anche che  $f' \in PS(\mathbb{R})$ . Se  $a_n$ ,  $b_n$  e  $c_n$  sono i coefficienti di Fourier di  $f$ , allora la serie*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} inc_n e^{inx} = \sum_{n=1}^{+\infty} (nb_n \cos(nx) - na_n \sin(nx))$$

converge a  $f'(x)$  in tutti i punti di continuità di  $f'$  e alla media  $\frac{1}{2}[f'(x^+) + f'(x^-)]$  nei punti (al più in numero finito) in cui  $f'$  ha discontinuità (a salto).

DIMOSTRAZIONE. Il risultato segue dal Teorema 2.11 di convergenza puntuale applicato alla derivata  $f'$  e dalle formule per i coefficienti trovate nel Teorema 2.15.  $\square$

**Teorema 2.16** (Serie di Fourier della primitiva). *Sia  $f \in PC(\mathbb{R})$  periodica di periodo  $2\pi$ , siano  $a_n$ ,  $b_n$  e  $c_n$  i suoi coefficienti di Fourier e sia  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ . Allora*

$$(2.22) \quad F(x) - c_0 x = C_0 + \sum_{n \neq 0} \frac{c_n}{in} e^{inx} = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{a_n}{n} \sin(nx) - \frac{b_n}{n} \cos(nx) \right),$$

dove il termine costante è

$$(2.23) \quad C_0 = \frac{1}{2} A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) dt.$$

DIMOSTRAZIONE. Essendo la funzione integrale di una funzione continua a tratti,  $F$  è continua e liscia a tratti. La funzione  $G(x) = F(x) - c_0 x$  ha le stesse proprietà ed inoltre è periodica di periodo  $2\pi$ , in quanto

$$G(x + 2\pi) - G(x) = F(x + 2\pi) - F(x) - (2\pi c_0) = \int_x^{x+2\pi} f(t) dt - (2\pi c_0) = 0.$$

Dal Teorema 2.11 di convergenza puntuale,  $F$  è la somma della sua serie di Fourier in ogni punto. Infine, il Teorema 2.14 applicato ad  $F$  mostra che i coefficienti di Fourier  $A_n$ ,  $B_n$  e  $C_n$  di  $F$  sono legati a quelli di  $f$  dalle formule

$$A_n = -\frac{b_n}{n}, \quad B_n = \frac{a_n}{n}, \quad C_n = \frac{c_n}{in}$$

per  $n \neq 0$ . La formula (2.23) è la solita formula per il termine costante di una serie di Fourier, in quanto la media di  $c_0 x$  sull'intervallo  $[-\pi, \pi]$  è nulla.  $\square$

Osserviamo che dalle eguaglianze che legano i coefficienti di Fourier  $a_n$ ,  $b_n$  e  $c_n$  segue

$$|c_{\pm n}| \leq |a_n| + |b_n|, \quad |a_n| \leq |c_n| + |c_{-n}|, \quad |b_n| \leq |c_n| + |c_{-n}|$$

e dunque sussiste l'equivalenza:

$$(2.24) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| < +\infty \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n| < +\infty \iff \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty.$$

**Teorema 2.17** (Convergenza assoluta e uniforme). *Sia  $f \in C(\mathbb{R}) \cap PS(\mathbb{R})$  e periodica di periodo  $2\pi$ . Allora la serie di Fourier di  $f$  converge ad  $f$  assolutamente e uniformemente.*

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente provare che  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty$ , in quanto allora la serie di Fourier di  $f$ , certamente convergente ad  $f$  per il Teorema di convergenza puntuale, converge totalmente e quindi assolutamente e uniformemente. Infatti, le stime

$$|a_n \cos(nx)| \leq |a_n|, \quad |b_n \sin(nx)| \leq |b_n|, \quad |c_n e^{inx}| \leq |c_n|$$

sono ovvie e dall'equivalenza (2.24) segue l'asserto. Sia  $c'_n$  il coefficiente di Fourier  $n$ -esimo di  $f'$ . Dal Teorema 2.14 sappiamo che  $c_n = c'_n/(in)$  per  $n \neq 0$ , mentre la diseuguaglianza di Bessel applicata a  $f'$  implica

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c'_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx < +\infty$$

Quindi, dalla diseuguaglianza di Cauchy-Schwartz si ha

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| = |c_0| + \sum_{n \neq 0} \left| \frac{c'_n}{n} \right| \leq |c_0| + \left( \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left( \sum_{n \neq 0} |c'_n|^2 \right)^{1/2} < +\infty,$$

che è quanto si voleva dimostrare.  $\square$

Abbiamo visto nel Teorema 2.15 che la serie di Fourier di  $f'$  si ottiene da quella di  $f$  derivando termine a termine. Derivando, il coefficiente di Fourier viene moltiplicato per  $\pm n$ , cosicché la serie di Fourier di  $f'$  converge più lentamente di quella di  $f$ . Lo stesso ragionamento varrà *a fortiori* per le derivate successive di  $f$ , se esistono. Rovesciando il punto di vista, se la serie di Fourier della derivata di un certo ordine converge, la serie di Fourier di  $f$  convergerà più rapidamente. Quindi c'è un legame tra la classe di differenziabilità di una funzione e la rapidità di convergenza della sua serie di Fourier. Eccone una versione quantitativa.

**Teorema 2.18.** *Sia  $f$  periodica di periodo  $2\pi$  e supponiamo che  $f \in C^{(k-1)}(\mathbb{R})$  con  $f^{(k-1)} \in PS(\mathbb{R})$ . Allora*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |n^k a_n|^2 < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |n^k b_n|^2 < +\infty, \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n^k c_n|^2 < +\infty.$$

*In particolare*

$$n^k a_n \rightarrow 0, \quad n^k b_n \rightarrow 0, \quad n^k c_n \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \pm\infty$$

*Viceversa, se i coefficienti di Fourier soddisfano  $|c_n| \leq C|n|^{-(k+\alpha)}$  per qualche  $C > 0$  e qualche  $\alpha > 1$ , allora  $f \in C^{(k)}(\mathbb{R})$ . La stessa conclusione vale se contemporaneamente valgono le diseuguaglianze  $|a_n| \leq C|n|^{-(k+\alpha)}$  e  $|b_n| \leq C|n|^{-(k+\alpha)}$ .*

DIMOSTRAZIONE. Per la prima parte, basta applicare il Teorema 2.14  $k$ -volte per dedurre che il coefficiente di Fourier  $n$ -esimo di  $f^{(k)}$  è  $(in)^k c_n$ , e poi applicare la diseuguaglianza di Bessel a  $f^{(k)}$ . Per la seconda parte, siccome  $\alpha > 1$  si ha

$$\sum_{n \neq 0} |n^j c_n| \leq C \sum_{n \neq 0} |n|^{-(k-j+\alpha)} \leq 2C \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\alpha} < +\infty \quad \text{per } j \leq k.$$

Quindi tutte le serie  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (in)^j c_n e^{inx}$  sono assolutamente uniformemente convergenti per  $j = 1, \dots, k$ . Esse definiscono pertanto funzioni continue, che altro non sono che le derivate  $f^{(j)}$  di  $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ .  $\square$

**2.3. Una applicazione.** Abbiamo finalmente il modo di analizzare in modo rigoroso l'esempio discusso nell'Introduzione. Ricordiamo che avevamo affrontato il problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in (0, \pi), \quad t \in (0, +\infty) \\ u(x, 0) = \varphi(x) & x \in [0, \pi], \quad \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & t \in (0, +\infty) \end{cases}$$

con  $\varphi$  continua, liscia a tratti su  $[0, \pi]$  e tale che  $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$ . Utilizzando la separazione delle variabili, eravamo giunti alle seguenti considerazioni: se

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx),$$

converge, allora la serie

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin(nx) =: \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x, t)$$

definisce formalmente una soluzione.

D'altra parte, poiché stiamo assumendo che  $\varphi$  sia continua, liscia a tratti su  $[-\pi, 0]$  e  $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$ , possiamo prolungare  $\varphi$  in modo dispari all'intervallo  $[-\pi, \pi]$  e poi ancora a tutto l'asse reale per periodicità, ottenendo una funzione in  $C(\mathbb{R}) \cap PS(\mathbb{R})$  e periodica di periodo  $2\pi$ . Pertanto la sua serie di Fourier è una serie di soli seni e converge totalmente, ossia  $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n| < +\infty$ . Dalla disuguaglianza ovvia  $|u_n(x, t)| \leq |b_n|$  abbiamo la convergenza uniforme della serie  $\sum u_n$ , ergo la continuità di  $u$ .

Fissiamo ora  $\varepsilon > 0$ . Siccome inoltre

$$|(u_n)_t(x, t)| = |b_n n^2 e^{-n^2 t} \sin(nx)| \leq |b_n| n^2 e^{-n^2 \varepsilon}$$

la cui serie è convergente, la serie di termine generale  $(u_n)_t(x, t)$  converge totalmente, quindi uniformemente in  $[0, \pi] \times [\varepsilon, +\infty)$ . Un discorso analogo vale per le serie di termine generale  $(u_n)_x$  e  $(u_n)_{xx}$ , che risultano quindi tutte continue in  $[0, \pi] \times [\varepsilon, +\infty)$  per ogni  $\varepsilon > 0$ , quindi in  $[0, \pi] \times (0, +\infty)$ . Abbiamo provato che la serie

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin(nx)$$

definisce effettivamente una soluzione.

Concludiamo la sezione risolvendo il problema generale presentato nell'Introduzione, che è stato ricondotto al problema "(P2)+(P3)". Con le normalizzazioni fatte, esso è

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in (0, \pi), \quad t \in (0, +\infty) \\ u(x, 0) = 0 & x \in [0, \pi] \\ u(0, t) = \mu_0(t) & t \in (0, +\infty), \quad \mu_0(0) = 0 \\ u(\pi, t) = \mu_\pi(t) & t \in (0, +\infty) \end{cases}$$

dove  $\mu_0, \mu_\pi \in C([0, +\infty))$ . Supponiamo per semplicità che in  $\mu_0, \mu_\pi \in C^1([0, +\infty))$ . Sia  $\psi = \psi(x, t)$  una funzione su  $[0, \pi] \times (0, +\infty)$  tale che  $\psi(0, t) = \mu_0(t)$  e  $\psi(\pi, t) = \mu_\pi(t)$ , ad esempio  $\psi(x, t) = \frac{x}{\pi}\mu_\pi(t) + \frac{x-\pi}{\pi}\mu_0(t)$ . Poniamo inoltre

$$\phi(x, t) = \psi_t(x, t) - \psi_{xx}(x, t).$$

Se  $w$  è una soluzione del problema di tipo (P4)

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = -\phi & x \in (0, \pi), \quad t \in (0, +\infty) \\ w(x, 0) = -\psi(x, 0) = 0 & x \in [0, \pi] \\ w(0, t) = 0 & t \in (0, +\infty) \\ w(\pi, t) = 0 & t \in (0, +\infty), \end{cases}$$

allora  $u = w + \psi$  è soluzione di (P2)+(P3). Infatti

$$\begin{aligned} (w + \psi)_t - (w + \psi)_{xx} &= (w_t - w_{xx}) + (\psi_t - \psi_{xx}) = -\phi + \phi = 0, \\ (w + \psi)(x, 0) &= w(x, 0) + \psi(x, 0) = 0 \\ (w + \psi)(0, t) &= w(0, t) + \psi(0, t) = \mu_0(t) \\ (w + \psi)(\pi, t) &= w(\pi, t) + \psi(\pi, t) = \mu_\pi(t). \end{aligned}$$

Non ci resta quindi che risolvere (P4), che riscriviamo

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f & x \in (0, \pi), \quad t \in (0, +\infty) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & t \in (0, +\infty) \\ u(x, 0) = 0 & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

con  $f \in C((0, \pi) \times (0, +\infty))$ . Aggiungiamo dapprima le ipotesi che esistano e siano continue (oppure limitate) le derivate  $f_x$  e  $f_{xx}$  e che  $f(0, t) = f(\pi, t) = 0$ . Quest'ultima ipotesi è in effetti rimovibile, ma è per esempio soddisfatta nel caso appena trattato per risolvere (P2)+(P3), dove  $f(x, t) = -\phi(x, t)$ . Cerchiamo una soluzione della forma

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k(t) \sin(kx)$$

dove

$$b_k(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u(x, t) \sin(kx) dx.$$

Posto

$$B_k(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x, t) \sin(kx) dx$$

otteniamo l'equazione ordinaria

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} b_k(t) + k^2 b_k(t) = B_k(t) \\ b_k(0) = 0, \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$b_k(t) = \int_0^t e^{-k^2(t-s)} B_k(s) ds,$$

cosicché

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^t e^{-k^2(t-s)} B_k(s) ds \sin(kx).$$

Dobbiamo naturalmente controllare che la serie e quella delle derivate convergano uniformemente. Per quanto riguarda la serie  $\sum u_k$  che definisce  $u$  abbiamo

$$|u_k(x, t)| \leq \int_0^\pi e^{-k^2(t-s)} |B_k(s)| ds \leq \frac{c}{k^2}$$

perché  $f_{xx}$  è continua e quindi limitata. Infatti, dall'ipotesi  $f(0, t) = f(\pi, t) = 0$  segue

$$\begin{aligned} |B_k(s)| &= \left| \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x, t) \sin(kx) dx \right| \\ &= \left| \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x, t) \frac{1}{k} \frac{d}{dt} \cos(kx) dx \right| \\ &= \left| \frac{2}{k\pi} \int_0^\pi f_x(x, t) \cos(kx) dx \right| \\ &= \frac{2}{k^2\pi} \int_0^\pi |f_{xx}(x, t)| dx \\ &\leq \frac{c}{k^2} \end{aligned}$$

in quanto  $f_{xx}$  è per ipotesi limitata in  $t$ . Perciò  $u$  è continua. Inoltre, se  $(x, t)$  varia in un compatto  $K$  contenuto in  $(0, \pi) \times (0, +\infty)$ , allora dalla formula generale

$$\frac{d}{dt} \int_0^t g(s, t) ds = g(t, t) + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial t}(s, t) ds$$

otteniamo

$$\begin{aligned} |\partial_t u_k(x, t)| &= \left| B_k(t) \sin(kx) - k^2 \int_0^t e^{-k^2(t-s)} B_k(s) ds \sin(kx) \right| \\ &\leq \frac{c}{k^2} + k^2 \frac{c}{k^2} \int_0^t e^{-k^2(t-s)} ds \\ &= \frac{c}{k^2} + c \frac{e^{-k^2(t-s)}}{k^2} \Big|_0^t \\ &= \frac{c}{k^2} + \frac{c}{k^2} - c \frac{e^{-k^2 t}}{k^2} \\ &= \frac{c}{k^2} (2 - e^{-k^2 t}) \\ &\leq \frac{c}{k^2} M \end{aligned}$$

dove  $M$  è il massimo di  $(2 - e^{-k^2 t})$  al variare di  $t$  nei valori per i quali  $(x, t) \in K$ : sicuramente  $1 < M < 2$ . Analogamente, per le derivate seconde rispetto ad  $x$ , si ottiene la convergenza uniforme delle serie e quindi il risultato cercato.

## 3. MISURA E INTEGRALE DI LEBESGUE

**3.1. Convergenza e completezza.** Consideriamo lo spazio vettoriale  $PC([a, b])$  delle funzioni continue a tratti sull'intervallo  $[a, b]$  nel senso della Definizione (2.8): una funzione di  $PC([a, b])$  è continua in tutti i punti di  $[a, b]$  tranne al più un numero finito di essi, in cui esistono tuttavia il limite sinistro e il limite destro. Per tali funzioni possiamo naturalmente definire la norma quadratica come in (2.11). La norma  $\|\cdot\|_2$  dà luogo a una nozione di convergenza per funzioni di  $PC([a, b])$ . In pratica, se  $(f_n)_{n \geq 0}$  è una successione di funzioni in  $PC([a, b])$ , diremo che  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge ad  $f \in PC([a, b])$  in norma quadratica se  $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$ , cioè:

$$f_n \rightarrow f \text{ in norma quadratica} \iff \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx \rightarrow 0.$$

La convergenza in norma quadratica non implica e non è implicata dalla convergenza puntuale su  $[a, b]$ .

**Esempio 3.1.**

Sia  $[a, b] = [0, 1]$  e sia

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1/n \\ 0 & \text{se } 1/n < x \leq 1. \end{cases}$$

Siccome

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^1 |f_n(x)|^2 dx = \int_0^{1/n} dx = \frac{1}{n},$$

è chiaro che  $f_n \rightarrow 0$  in norma quadratica ma poiché  $f_n(0) = 1$  per ogni  $n$ , la successione non converge puntualmente alla funzione nulla. D'altra parte, se

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ n & \text{se } 0 < x < 1/n \\ 0 & \text{se } 1/n < x \leq 1, \end{cases}$$

allora  $g_n \rightarrow 0$  puntualmente, ma

$$\|g_n\|_2^2 = \int_0^1 |g_n(x)|^2 dx = \int_0^{1/n} n^2 dx = n$$

ed è ovvio che non c'è convergenza in norma quadratica. Il seguente risultato, di semplice dimostrazione, mette in relazione convergenza uniforme ed in media quadratica.

**Teorema 3.2.** *Se la successione  $(f_n)_{n \geq 0}$  di funzioni integrabili secondo Riemann su  $[a, b]$  converge uniformemente ad  $f$  in  $[a, b]$ , allora converge ad  $f$  in norma quadratica.*

Altrettanto facilmente si dimostra il seguente risultato di continuità.

**Proposizione 3.3.** *Se la successione  $(f_n)_{n \geq 0}$  di funzioni integrabili secondo Riemann su  $[a, b]$  converge ad  $f$  in norma quadratica, allora*

- (i)  $\|f_n\|_2 \rightarrow \|f\|_2$ ;
- (ii)  $\langle f_n, g \rangle \rightarrow \langle f, g \rangle$  per ogni  $g$  integrabile secondo Riemann su  $[a, b]$ .

I due risultati precedenti, valgono evidentemente in  $PC([a, b])$ , i cui elementi sono funzioni integrabili secondo Riemann su  $[a, b]$ . Lo spazio  $PC([a, b])$  non soddisfa peraltro una proprietà di cruciale importanza: esso non è completo. La definizione formale di spazio completo richiede il concetto di successione di Cauchy, che può essere data in un contesto più generale, quello degli spazi metrici. Si dice **spazio metrico** un insieme  $M$  su cui sia definita una distanza, ossia una funzione  $d : M \times M \rightarrow [0, +\infty)$  tale che

- (1)  $d(x, y) = d(y, x)$ ;
- (2)  $d(x, y) \geq 0$  e  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ ;
- (3)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Lo spazio  $PC([a, b])$  non è uno spazio metrico rispetto alla distanza  $d(f, g) = \|f - g\|_2$ , ma lo è  $\widetilde{PC}([a, b])$  (si veda l'Esercizio 3 della Sezione 2.1). Una successione  $(x_n)_{n \geq 0}$  di elementi di uno spazio metrico  $M$  si dice **successione di Cauchy** se

$$\text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } N \in \mathbb{N} \text{ tale che se } n, m > N \text{ allora } d(x_n, x_m) < \varepsilon,$$

ossia se i termini della successione diventano arbitrariamente vicini l'uno all'altro. Esempi di successioni di Cauchy sono tutte le successioni convergenti. Non è però vero il viceversa: come vedremo sotto, non sempre una successione di Cauchy in  $M$  converge ad un elemento di  $M$ . Nel caso di  $PC([a, b])$  avremo che la successione  $(f_n)_{n \geq 0}$  di funzioni in  $\widetilde{PC}([a, b])$  è una successione di Cauchy rispetto alla distanza  $d(f, g) = \|f - g\|_2$  se

$$\text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } N \in \mathbb{N} \text{ tale che se } n, m > N \text{ allora } \|f_n - f_m\|_2 < \varepsilon.$$

Uno spazio metrico si dice **completo** se ogni successione di Cauchy è convergente ad un elemento dello spazio. Esempi di spazi completi sono  $\mathbb{R}$  oppure lo spazio vettoriale  $C([a, b])$  delle funzioni continue in  $[a, b]$  rispetto alla distanza

$$(3.1) \quad d(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|.$$

Un esempio di spazio non completo è il corpo dei numeri razionali  $\mathbb{Q}$ . Un altro è lo spazio  $\widetilde{PC}([a, b])$ , come andiamo a verificare.

### Esempio 3.4.

Se  $[a, b] = [0, 1]$  e se definiamo

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x \leq 1/n \\ x^{-1/4} & \text{se } 1/n < x \leq 1, \end{cases}$$

e poi indichiamo con  $\tilde{f}$  la regolarizzata di  $f$  nel senso discusso a seguito della Definizione 2.8, allora se ad esempio  $m > n > N$  con  $N \geq 4/\varepsilon^2$ , si ha

$$\|\tilde{f}_n - \tilde{f}_m\|_2^2 = \int_{1/m}^{1/n} x^{-1/2} dx = 2\sqrt{x} \Big|_{1/m}^{1/n} = 2 \left( \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{m}} \right) < \frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon,$$

cosicché  $(\tilde{f}_n)_{n \geq 0}$  è di Cauchy. D'altra parte il limite (puntuale e in norma quadratica) è la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ x^{-1/4} & \text{se } 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

che non sta in  $\widetilde{PC}([a, b])$ , né in  $PC([a, b])$ , perché non ammette limite destro finito nell'origine.

Si potrebbe ovviare a questo problema consentendo agli elementi di un nuovo spazio di divergere in un numero finito di punti purché i corrispondenti integrali impropri continuo ad esistere. Ma neppure ciò sarebbe sufficiente per ottenere uno spazio completo. È infatti possibile costruire successioni di Cauchy i cui elementi diventano sempre più singolari ed in modo che la funzione limite diviene non-integrabile secondo Riemann in alcun sottointervallo. Questo serio problema strutturale è, a ben vedere, dovuto ad una inadeguata nozione di integrale, cioè dell'integrale di Riemann. Esso può essere superato mediante una nozione più sofisticata (ma *non* più difficile) di integrale, cioè l'integrale secondo Lebesgue in  $\mathbb{R}^n$ . Nella prossima sezione percorriamo in modo estremamente sintetico le tappe principali di questa teoria dell'integrazione, rimandando il lettore ad esempio a [F3] oppure [R1] per i dettagli.

### Esercizi.

1. Provare il Teorema 3.2.
2. Provare la Proposizione 3.3.
3. Provare che  $C([a, b])$  è completo nella distanza (3.1).

**3.2. L'integrale di Lebesgue.** La nozione di integrale di Lebesgue in  $\mathbb{R}^n$  è fondata sul concetto di misura e di misurabilità.

- (i) Si considerano gli intervalli  $n$ -dimensionali  $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ , cui si associa la misura

$$m(I) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Ogni famiglia finita di iperpiani paralleli agli assi di  $\mathbb{R}^n$  definisce un reticolato, ossia suddivide  $\mathbb{R}^n$  in un numero finito di intervalli ("quasi disgiunti") e di un numero finito di insiemi illimitati. Si chiama **pluri-intervallo** una unione finita di intervalli di un reticolato. Se  $Y = I_1 \cup \cdots \cup I_N$  è un pluri-intervallo, si pone

$$m(Y) = m(I_1) + \cdots + m(I_N),$$

la misura di  $Y$ .

- (ii) Introduciamo la notazione  $[0, +\infty]$  per l'insieme  $[0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ , dove  $+\infty$  rappresenta l'estremo superiore degli insiemi non limitati superiormente. Si definisce la misura di un qualunque insieme aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^n$  mediante

$$m(A) = \sup\{m(Y) : Y \text{ è un pluri-intervallo, } Y \subset A\} \in [0, +\infty]$$

e di un qualunque insieme compatto  $K$  mediante

$$m(K) = \inf\{m(Z) : Z \text{ è un pluri-intervallo, } Z \supset K\} \in [0, +\infty).$$

(iii) Dato un qualunque insieme  $E \subset \mathbb{R}^n$ , si chiama **misura esterna** di  $E$

$$m_{\text{est}}(E) = \inf\{m(A) : A \text{ è un aperto, } A \supset E\} \in [0, +\infty],$$

e si chiama **misura interna**

$$m_{\text{int}}(E) = \sup\{m(K) : K \text{ è un compatto, } K \subset E\} \in [0, +\infty],$$

Si dice poi che un insieme limitato  $E \subset \mathbb{R}^n$  è **misurabile secondo Lebesgue** se

$$m_{\text{est}}(E) = m_{\text{int}}(E) < +\infty$$

ed in tal caso il valore comune della misura interna ed esterna si dice la **misura** di  $E$ . Se  $E$  è invece illimitato, diremo che esso è misurabile secondo Lebesgue se per ogni  $r > 0$  è misurabile l'insieme limitato  $E \cap B(0, r)$  ed in tal caso poniamo

$$m(E) = \lim_{r \rightarrow +\infty} m(E \cap B(0, r)) \in [0, +\infty].$$

(iv) Si provano le proprietà principali della misura, ossia le cosiddette **sub-additività** e **additività numerabili**: se  $E_1, E_2, \dots$  è una famiglia numerabile di insiemi misurabili e si pone

$$E = \bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k,$$

allora  $E$  è misurabile e risulta

$$m(E) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} m(E_k).$$

Se poi gli  $E_k$  sono a due a due disgiunti, risulta

$$m(E) = \sum_{k=1}^{+\infty} m(E_k).$$

mentre se  $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \dots$  allora

$$m(E) = \lim_{k \rightarrow +\infty} m(E_k).$$

Per quanto riguarda le intersezioni, possiamo solo dire che rimangono misurabili le intersezioni finite di insiemi misurabili. La classe di tutti gli insiemi misurabili secondo Lebesgue costituisce ciò che si chiama una  **$\sigma$ -algebra**.

(v) A questo punto si selezionano le funzioni per le quali si potrà parlare di integrale, cioè le **funzioni misurabili**: esse sono quelle funzioni, inizialmente scelte a valori reali, per le quali risulta misurabile

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > a\}$$

per ogni numero reale  $a$ . Esse godono di una proprietà cruciale, cioè la possibilità di essere ben approssimate dalle cosiddette **funzioni semplici**. Quest'ultime

sono le funzioni del tipo

$$(3.2) \quad s(x) = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{E_i}(x),$$

dove le  $\chi_{E_i}$  sono le funzioni caratteristiche degli insiemi misurabili  $E_1, \dots, E_N$  e  $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{C}$ . Si osservi che ogni insieme  $E_i$  dev'essere misurabile, ma non si richiede che abbia misura finita. L'approssimazione è come segue. Se  $f$  è una funzione misurabile, allora esiste una successione di funzioni semplici  $(s_k)_{k \geq 0}$  che converge puntualmente ad  $f$ . Se  $f \geq 0$ , la successione può essere scelta in modo da essere monotona crescente.

Le funzioni misurabili si “comportano bene” rispetto a molte operazioni. Sono ad esempio misurabili somme, prodotti e limiti puntuali di funzioni misurabili, così come estremi superiore e inferiore di successioni di funzioni misurabili. Se  $f$  è misurabile, allora lo sono anche  $|f|$  e  $\operatorname{sgn} f$ , la funzione che vale 1 dove  $f$  è positiva,  $-1$  dove  $f$  è negativa e zero dove è zero  $f$ ; ovviamente vale l'uguaglianza

$$f = |f|(\operatorname{sgn} f),$$

detta anche la decomposizione polare di  $f$ . Ogni funzione si scrive come somma

$$f = f^+ - f^-,$$

ove

$$f^+(x) = \max(f(x), 0), \quad f^-(x) = \max(-f(x), 0)$$

sono, rispettivamente, la parte positiva e la parte negativa di  $f$ . Esse sono entrambe misurabili se e solo se lo è  $f$ .

- (vi) Sia  $E$  un insieme misurabile. Per ogni  $s$  semplice e non-negativa come in (3.2) definiamo

$$I_E(s) = \sum_{i=1}^N c_i m(E \cap E_i),$$

il suo integrale su  $E$ . Si stabilisce che  $I_E(s) = +\infty$  se uno o più degli insiemi  $E \cap E_i$  ha misura infinita. Sia ora  $f$  una funzione misurabile e non-negativa. L'integrale secondo Lebesgue di  $f$  su  $E$  è definito come l'estremo superiore degli integrali delle funzioni semplici e non-negative che approssimano  $f$  da sotto:

$$\int_E f \, dm = \sup\{I_E(s) : s \text{ è semplice e } 0 \leq s \leq f\}, \quad f \text{ non-negativa.}$$

Si noti che l'integrale può benissimo valere  $+\infty$  e che comunque le definizioni sono compatibili, nel senso che per le funzioni semplici si ha  $I_E(s) = \int_E s \, dm$ .

Se  $f$  è una funzione misurabile a valori reali e se almeno uno degli integrali  $\int_E f^+ \, dm$  oppure  $\int_E f^- \, dm$  è finito, definiamo

$$(3.3) \quad \int_E f \, dm = \int_E f^+ \, dm - \int_E f^- \, dm, \quad f \text{ reale.}$$

Se entrambi gli integrali in (3.3) sono finiti, allora l'espressione (3.3) è finita e diciamo che  $f$  è **integrabile secondo Lebesgue** su  $E$  rispetto alla misura di Lebesgue e che (3.3) è **l'integrale secondo Lebesgue di  $f$** . Siccome  $|f| = f^+ + f^-$  è chiaro che  $f$  è integrabile se e solo se lo è  $|f|$ . L'insieme delle funzioni

integrabili su  $E$  a valori reali è uno spazio vettoriale reale e l'integrale è un funzionale  $\mathbb{R}$ -lineare su di esso.

Infine, l'integrale di Lebesgue si estende facilmente alle funzioni a valori complessi. Se  $f = u + iv$ , diciamo che  $f$  è misurabile se e solo se lo sono sia  $u$  che  $v$  e che  $f$  è integrabile su  $E$  se  $\int_E |f| < +\infty$ . Siccome  $|f| \leq |u| + |v| \leq 2|f|$ , risulterà che  $f$  è integrabile se e solo se lo sono sia  $u$  che  $v$ . In tal caso definiamo

$$\int_E f \, dm = \int_E u \, dm + i \int_E v \, dm, \quad f \text{ complessa.}$$

Quindi, lo spazio delle funzioni integrabili su  $E$  a valori complessi è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$  e l'integrale è un funzionale  $\mathbb{C}$ -lineare su di esso. Questo spazio viene denotato con  $L^1(E)$ .<sup>3</sup> Uno spazio di grande rilevanza è lo spazio  $L^1(\mathbb{R}^n)$  delle funzioni integrabili su tutto  $\mathbb{R}^n$ , spesso abbreviato in  $L^1$ .

Dal punto di vista operativo è importante osservare che se  $f \in L^1(E)$ , allora

$$\left| \int_E f \, dm \right| \leq \int_E |f| \, dm.$$

Più in generale, se  $f$  è misurabile, se  $g \in L^1(E)$  e  $|f| \leq g$ , allora  $f \in L^1(E)$  e

$$\left| \int_E f \, dm \right| \leq \int_E g \, dm.$$

- (vii) Una proprietà molto importante dell'integrale secondo Lebesgue è che gli insiemi di misura zero possono essere trascurati nell'integrazione. Se  $f$  e  $g$  sono due funzioni misurabili e l'insieme  $A$  su cui  $f(x) \neq g(x)$  è tale che  $m(A) = 0$ , allora

$$\int_E f \, dm = \int_E g \, dm$$

ogniquale volta gli integrali esistono. Diremo in tal caso che  $f$  e  $g$  coincidono **quasi ovunque** oppure che  $f(x) = g(x)$  per **quasi ogni**  $x$ , abbreviato in "q.o.  $x$ ". Nel caso unidimensionale, un insieme  $A$  avrà misura nulla se per ogni  $\varepsilon > 0$  esso può essere ricoperto da una successione di intervalli aperti  $(I_n)_{n \geq 0}$  tali che  $\sum_n m(I_n) < \varepsilon$ . Per esempio, le famiglie numerabili di punti hanno misura nulla.

La proprietà di coincidere quasi ovunque in  $\mathbb{R}^n$  caratterizza le funzioni che hanno integrale uguale su ogni insieme misurabile. Si ha infatti che se  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , allora le seguenti proprietà sono equivalenti:

(a)  $\int_E f \, dm = \int_E g \, dm$  per ogni insieme misurabile  $E \subset \mathbb{R}^n$ ;

(b)  $\int_{\mathbb{R}^n} |f - g| \, dm = 0$ ;

(c)  $f = g$  quasi ovunque.

Questo cruciale ancorché semplice risultato suggerisce di modificare la definizione di  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , riguardandolo come l'insieme delle **classi di equivalenza** delle funzioni integrabili che coincidono quasi ovunque. Un elemento di  $L^1(\mathbb{R}^n)$  sarà quindi non una funzione ma l'insieme di tutte le funzioni che sono quasi ovunque uguali ad una funzione data. Riterremo peraltro la notazione  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  per

---

<sup>3</sup>Il significato del simbolo  $L^1$  sarà chiarito nella Sezione 3.3. Si veda il successivo punto (vii) per una definizione formalmente più corretta.

intendere che  $f$  è una funzione integrabile definita quasi ovunque. Il vantaggio primario di introdurre le classi di equivalenza consiste nel fatto che  $d(f, g) = \int_E |f - g| dm$  definisce una metrica su  $L^1(E)$  rispetto alla quale esso è uno spazio metrico completo (si veda il Teorema 3.12).

- (viii) Per quanto riguarda le convergenze degli integrali di successioni di funzioni, enunciamo due importantissimi teoremi.

**Teorema 3.5** (Convergenza monotona di Lebesgue). *Sia  $(f_n)_{n \geq 0}$  una successione di funzioni misurabili su  $\mathbb{R}^n$  e supponiamo che*

- (a)  $0 \leq f_0(x) \leq f_1(x) \leq \dots$  per quasi ogni  $x \in E$ ;  
 (b)  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  per  $n \rightarrow +\infty$  per quasi ogni  $x \in E$ .

Allora si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n dm = \int_E f dm.$$

**Teorema 3.6** (Convergenza dominata di Lebesgue). *Sia  $(f_n)_{n \geq 0}$  una successione di funzioni misurabili su  $\mathbb{R}^n$  e supponiamo che*

- (a) esiste una funzione  $g \in L^1(E)$  tale che  $|f_n(x)| \leq g(x)$  per quasi ogni  $x \in E$  e per ogni  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  
 (b)  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  per  $n \rightarrow +\infty$  per quasi ogni  $x \in E$ . Allora si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n dm = \int_E f dm.$$

- (ix) L'integrale di Lebesgue estende l'integrale di Riemann. Nel caso unidimensionale si ha infatti che se una funzione limitata  $f$  è integrabile secondo Riemann su  $[a, b]$ , allora essa è integrabile secondo Lebesgue su  $[a, b]$  e i due integrali coincidono. Inoltre, se  $f$  è limitata su  $[a, b]$ , allora essa è integrabile secondo Riemann se e solo se essa è continua quasi ovunque rispetto alla misura di Lebesgue.

Naturalmente, l'integrale di Lebesgue è una estensione propria di quello di Riemann, perché ad esempio la funzione di Dirichlet

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0 & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1] \end{cases}$$

è integrabile secondo Lebesgue ma non secondo Riemann in  $[0, 1]$ , in quanto è ovunque discontinua. Poiché l'integrale di Lebesgue sugli intervalli è una estensione dell'integrale definito di Riemann, non c'è una buona ragione per modificare le solite notazioni, cosicché scriveremo spesso, ad esempio

$$\int_E f(x) dx, \quad \int_0^1 f(x) dx$$

in luogo, rispettivamente, di

$$\int_E f dm, \quad \int_{[0,1]} f dm.$$

Per quanto riguarda gli integrali impropri secondo Riemann, risulta che se  $f$  è assolutamente integrabile secondo Riemann in senso improprio, allora  $f \in L^1(\mathbb{R})$  e nuovamente l'integrale (improprio) di Riemann e di Lebesgue coincidono. Per

contro, vi sono casi in cui certi integrali impropri sono ancora riconducibili ad integrali di Lebesgue ma è necessario un ulteriore procedimento di limite. Se ad esempio  $f$  è integrabile secondo Riemann in ogni intervallo  $[0, b]$  e integrabile secondo Lebesgue in  $[0, +\infty)$ , allora

$$\int_{[0, +\infty)} f \, dm = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x) \, dx := \int_0^{+\infty} f(x) \, dx,$$

ma il limite sulla destra può esistere anche se  $f$  non è integrabile secondo Lebesgue. Ad esempio la funzione

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \chi_{(n, n+1]}$$

non è in  $L^1(\mathbb{R})$  ma  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x) \, dx$  converge.

- (x) Il celebrato Teorema di Fubini-Tonelli mette in relazione l'integrale di Lebesgue  $(n+m)$ -dimensionale di una funzione definita in  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  con gli integrali iterati, fatti prima in  $\mathbb{R}^n$  e poi in  $\mathbb{R}^m$ , o viceversa. Scriviamo i punti di  $\mathbb{R}^{n+m}$  nella forma  $(x, y)$ , con  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $y \in \mathbb{R}^m$  e indichiamo con  $dx$ ,  $dy$  e  $dm$  le misure di Lebesgue rispettivamente in  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^{n+m}$ . Se  $f : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{C}$ , allora per ogni fissato  $x \in \mathbb{R}^n$  possiamo considerare la funzione

$$f_x : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}, \quad f_x(y) = f(x, y)$$

e quindi l'integrale iterato

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^m} f_x \, dy \right) dx.$$

Analogamente, fissato  $y \in \mathbb{R}^m$  potremo considerare la funzione  $f^y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  definita da  $f^y(x) = f(x, y)$  e quindi l'integrale iterato nell'ordine corrispondente.

**Teorema 3.7** (Teorema di Fubini-Tonelli).

- (a) (Tonelli) Se  $f : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow [0, +\infty]$  è misurabile, allora  $g(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f_x \, dy$  e  $h(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f^y \, dx$  sono entrambe misurabili e vale la formula

$$(3.4) \quad \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f \, dm = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^m} f_x \, dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{\mathbb{R}^n} f^y \, dx \right) dy.$$

- (b) (Fubini) Se  $f \in L^1(\mathbb{R}^{n+m})$ , allora  $f_x \in L^1(\mathbb{R}^m)$  per quasi ogni  $x$ ,  $f^y \in L^1(\mathbb{R}^n)$  per quasi ogni  $y$ , le funzioni  $g(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f_x \, dy$  e  $h(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f^y \, dx$  sono, rispettivamente, in  $L^1(\mathbb{R}^n)$  e in  $L^1(\mathbb{R}^m)$  e vale la formula (3.4).

Il Teorema di Fubini-Tonelli si usa solitamente per provare che l'ordine di integrazione in un integrale iterato può essere scambiato, cioè per provare che

$$\int_A \left( \int_B f(x, y) \, dy \right) dx = \int_B \left( \int_A f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Si procede come segue: si verifica dapprima che uno dei due integrali iterati di  $|f|$  è finito, cosicché, applicando Tonelli, si ha  $f \in L^1(A \times B)$ . Poi si applica Fubini per scambiare l'ordine.

- (xi) Chiudiamo questa sezione con alcuni fatti molto utili dal punto di vista del calcolo. Innanzitutto osserviamo che la misura di Lebesgue è **invariante per traslazioni**. Ciò significa che se  $a \in \mathbb{R}^n$  e  $E \subset \mathbb{R}^n$  è un insieme misurabile, allora tale è anche il traslato  $\sigma_a(E) = E + a = \{e + a : e \in E\}$ . Inoltre, se  $|E| < \infty$ , allora  $|\sigma_a(E)| = |E|$ . Analogo discorso vale per le funzioni misurabili: se  $f$  è misurabile, allora tali sono anche  $x \mapsto f \circ \sigma_a(x) = f(x + a)$  e  $x \mapsto f \circ \tau_a(x) = f(x - a)$ , e se  $f \geq 0$  oppure  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  allora

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x - a) dm(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dm(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x + a) dm(x).$$

Per quanto riguarda le regole del cambio di variabili, ricordiamo che una mappa  $G = (g_1, \dots, g_n)$  definita su un aperto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  a valori in  $\mathbb{R}^n$  si dice un **diffeomorfismo** di classe  $C^1$  se essa è iniettiva, se ogni componente è di classe  $C^1$  e se la mappa lineare  $D_x G$  che nella base canonica è rappresentata dalla matrice quadrata  $(\partial g_i / \partial x_j)_{ij}$  delle derivate parziali di  $G$ , è invertibile in ogni punto  $x \in \Omega$ . In particolare, sono diffeomorfismi di classe  $C^1$  le mappe lineari, quelle cioè date da matrici  $T \in GL(n, \mathbb{R})$ , per le quali risulta  $D_x T = T$  per ogni  $x$ .

**Teorema 3.8.** *Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un aperto e sia  $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  un diffeomorfismo di classe  $C^1$ .*

- (a) *Se  $f$  è una funzione misurabile secondo Lebesgue su  $G(\Omega)$ , allora  $f \circ G$  è misurabile su  $\Omega$ . Se  $f \geq 0$  oppure  $f \in L^1(G(\Omega))$ , allora*

$$\int_{G(\Omega)} f(x) dx = \int_{\Omega} f \circ G(x) |\det D_x G| dx.$$

- (b) *Se  $E \subset \Omega$  è misurabile secondo Lebesgue, allora  $G(E)$  è anch'esso misurabile e  $|G(E)| = \int_E |\det D_x G| dx$ . In particolare, se  $T \in GL(n, \mathbb{R})$ , allora  $|T(E)| = |\det T| |E|$*

Terminiamo con il teorema di derivazione sotto il segno di integrale.

**Teorema 3.9.** *Sia  $f : \mathbb{R}^n \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  e sia  $f(\cdot, t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  integrabile per ogni  $t \in [a, b]$ . Si ponga  $F(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, t) dm(x)$ .*

- (a) *Supponiamo che esista  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  tale che  $|f(x, t)| \leq g(x)$  per ogni  $x$  e  $t$ . Se  $\lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) = f(x, t_0)$  per ogni  $x$ , allora  $\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = F(t_0)$ .*
- (b) *Supponiamo che esista la derivata parziale  $\partial f / \partial t$  e che esista  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  tale che  $|(\partial f / \partial t)(x, t)| \leq g(x)$  per ogni  $x$  e  $t$ . Allora  $F$  è derivabile e*

$$F'(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dm(x).$$

## Esercizi.

4. Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  misurabile. Per  $j = 0, 1, \dots$  e  $0 \leq k \leq 2^{2j} - 1$  siano

$$E_j^k = f^{-1}([k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]), \quad F_j = f^{-1}((2^j, +\infty])$$

e sia quindi

$$\varphi_j = \sum_{k=0}^{2^{2j}-1} k 2^{-j} \chi_{E_j^k} + 2^j \chi_{f_n}.$$

Provare che  $(\varphi_j)_{j \geq 0}$  è una successione di funzioni semplici e non-negative tali che  $\varphi_0 \leq \varphi_1 \leq \dots < f$ , che converge puntualmente ad  $f$  e uniformemente in ogni insieme in cui  $f$  è limitata.

5. Provare che per ogni funzione semplice  $s$  si ha  $I_E(s) = \int_E s \, dm$ .

6. Provare che lo spazio delle funzioni integrabili su  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  a valori complessi è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$  e l'integrale è un funzionale  $\mathbb{C}$ -lineare su di esso.

7. Provare che la funzione di Dirichlet è integrabile secondo Lebesgue ma non secondo Riemann in  $[0, 1]$ .

8. Provare che la funzione  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \chi_{(n, n+1]}$  non è in  $L^1(\mathbb{R})$  ma  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x) \, dx$  converge.

**3.3. Gli spazi di Lebesgue.** Siamo finalmente in grado di introdurre gli spazi  $L^p$ , detti gli spazi di Lebesgue. Essi sono spazi di grandissima importanza in analisi. Se  $1 \leq p < +\infty$ , e  $f$  è una funzione misurabile su  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ , poniamo

$$(3.5) \quad \|f\|_p = \left( \int_E |f|^p \, dm \right)^{1/p}$$

e defiamo

$$(3.6) \quad L^p(E) = \{f : E \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ è misurabile e } \|f\|_p < +\infty\}.$$

Come nel caso di  $L^1(E)$ , che è naturalmente il caso che corrisponde a  $p = 1$ , identifichiamo funzioni che coincidono quasi ovunque, cosicché  $L^p(E)$  è di fatto lo spazio quoziente di quello definito in (3.6) modulo la relazione di uguaglianza quasi ovunque. Si osservi che da

$$|f + g|^p \leq [2 \max(|f|, |g|)]^p \leq 2^p (|f|^p + |g|^p)$$

segue che  $L^p(E)$  è uno spazio vettoriale.

Uno spazio vettoriale  $X$  si dice **normato** se esiste una funzione  $x \mapsto \|x\|$  a valori in  $[0, +\infty)$ , detta **norma**, che soddisfa le seguenti proprietà

- (1)  $\|x\| = 0 \iff x = 0$ ;
- (2)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  per ogni scalare  $\lambda$ ;
- (3)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  per ogni  $x, y \in X$ .

Se  $X$  è uno spazio normato, la funzione  $d(x, y) = \|x - y\|$  definisce una metrica, nel senso visto nella Sezione 3.1. Nel nostro caso, la (3.5) soddisfa (1), perché  $\|f\|_p = 0$  se e solo se  $f = 0$  quasi ovunque per via della equivalenza discussa al punto (vii) della sezione precedente. Quindi è l'elemento nullo in  $L^p(E)$ . Inoltre, essa soddisfa banalmente (2). La ragione per cui si considerano gli spazi  $L^p$  solamente per  $p \geq 1$  è che solo per tali valori di  $p$  vale (3), nota anche come la **diseguaglianza triangolare**, per provare la quale è necessaria qualche ulteriore considerazione.

Se  $p$  e  $q$  sono numeri reali positivi tali che  $p + q = pq$ , ossia

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

diremo che  $p$  e  $q$  sono **esponenti coniugati**. Il caso più importante è il caso  $p = q = 2$ . È chiaro che se  $p$  e  $q$  sono coniugati, allora  $1 < p < +\infty$  e  $1 < q < +\infty$ . Poiché però se  $p \rightarrow 1$  si ha  $q \rightarrow +\infty$ , si considerano anche  $1$  e  $\infty$  come esponenti coniugati. Per dare significato all'espressione  $\|f\|_p$  anche nel caso  $p = \infty$  si introduce la nozione di **estremo superiore essenziale** di una funzione misurabile  $f$ . Diremo che  $M \geq 0$  è un maggiorante essenziale per  $f$  se  $f(x) \leq M$  per quasi ogni  $x$  e denoteremo con  $\mathcal{M}(f)$  l'insieme dei maggioranti essenziali di  $f$ . Infine scriveremo

$$\|f\|_\infty = \begin{cases} \inf \mathcal{M}(|f|) & \text{se } \mathcal{M}(|f|) \neq \emptyset \\ +\infty & \text{se } \mathcal{M}(|f|) = \emptyset \end{cases}$$

e diremo che  $f$  è essenzialmente limitata se  $\|f\|_\infty < +\infty$ . La definizione di  $L^\infty(E)$  è a questo punto ovvia: esso è lo spazio vettoriale delle classi di equivalenza delle funzioni essenzialmente limitate, modulo la relazione di eguaglianza quasi ovunque.

**Lemma 3.10.** *Se  $a, b \geq 0$  e  $0 < \lambda < 1$ , allora  $a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1 - \lambda)b$  e l'uguaglianza vale se e solo se  $a = b$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Il risultato è ovvio se  $b = 0$ . Altrimenti, dividendo entrambi i membri per  $b$  e ponendo  $t = a/b$ , ci si riduce a provare che  $t^\lambda \leq \lambda t + (1 - \lambda)$  e che l'uguaglianza vale solo per  $t = 1$ . D'altra parte, la funzione  $t^\lambda - \lambda t$  è crescente per  $t \in (0, 1]$  e decrescente per  $t \in [1, +\infty)$  ed ha quindi un massimo assoluto per  $t = 1$ , che vale  $1 - \lambda$ .  $\square$

**Teorema 3.11.** *Sia  $E$  un insieme misurabile.*

(a) *Siano  $p$  e  $q$  esponenti coniugati con  $1 \leq p \leq \infty$ . Se  $f \in L^p(E)$  e  $g \in L^q(E)$  allora  $fg \in L^1(E)$  e*

$$(3.7) \quad \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

*L'uguaglianza vale se e solo se  $\alpha|f|^p = \beta|g|^q$  quasi ovunque per due costanti non nulle  $\alpha$  e  $\beta$ . Questa disuguaglianza si dice di **Hölder**, e nel caso particolare  $p = q = 2$  si dice di **Cauchy-Schwartz**.*

(b) *Sia  $1 \leq p \leq \infty$ . Se  $f, g \in L^p(E)$  allora  $f + g \in L^p(E)$  e*

$$(3.8) \quad \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

*Questa disuguaglianza si dice di **Minkowski**<sup>4</sup>, ed è la disuguaglianza triangolare per la norma  $L^p$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** (a) Ci limitiamo al caso  $1 < p < +\infty$ . Il caso  $p = 1$  e  $q = \infty$  è lasciato per esercizio (si veda l'Esercizio 10). Inoltre il risultato è banale se  $\|f\|_p = 0$  oppure  $\|g\|_q = 0$  perché allora  $f = 0$  q.o. oppure  $g = 0$  q.o. e allora  $fg = 0$  q.o. Osserviamo che se (3.7) vale per una coppia di funzioni  $f$  e  $g$ , allora essa vale per tutti

<sup>4</sup>Si veda l'Esercizio 11 per una versione integrale di questa disuguaglianza, dove cioè le somme sono rimpiazzate da integrali.

i loro multipli scalari. Possiamo pertanto assumere che  $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$  e cercare di dimostrare (3.7) con uguaglianza solo se  $|f|^p = |g|^q$  quasi ovunque. A questo scopo, applichiamo il Lemma 3.10 ad  $a = |f(x)|^p$  e  $b = |g(x)|^q$  e  $\lambda = 1/p$ , ottenendo:

$$(3.9) \quad |f(x)g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q.$$

Integrando entrambi i membri si perviene a

$$\|fg\|_1 \leq \frac{1}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{q}\|g\|_q^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p\|g\|_q.$$

L'uguaglianza qui vale solo se vale in (3.9), e per il Lemma 3.10, ciò avviene solo se  $|f|^p = |g|^q$  quasi ovunque.

(b) Il risultato è ovvio per  $p = 1$  oppure se  $f + g = 0$  quasi ovunque. Altrimenti osserviamo che, per  $1 < p < \infty$

$$|f + g|^p \leq (|f| + |g|)|f + g|^{p-1}$$

e applichiamo Hölder ai prodotti  $|f||f + g|^{p-1}$  e  $|g||f + g|^{p-1}$  tenendo conto del fatto che  $q = p/(p-1)$  è l'esponente coniugato di  $p$ :

$$\begin{aligned} \int_E |f + g|^p dm &\leq \|f\|_p \| |f + g|^{p-1} \|_q + \|g\|_p \| |f + g|^{p-1} \|_q \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \left( \int_E |f + g|^p dm \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

In conclusione,

$$\|f + g\|_p = \left( \int_E |f + g|^p dm \right)^{1-1/q} \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

come volevasi. Il caso  $p = \infty$  è lasciato per esercizio.  $\square$

Possiamo perciò concludere che gli spazi  $L^p$  sono tutti spazi normati e, in quanto tali, sono spazi metrici. Tutta la costruzione di Lebesgue è giustificata dal seguente fondamentale

**Teorema 3.12.** *Per ogni insieme misurabile  $E$  e per ogni  $1 \leq p \leq \infty$  lo spazio  $L^p(E)$  è uno spazio metrico completo.*

Di particolare importanza sono gli spazi  $L^2(E)$ , i quali godono di una proprietà in più: essi sono muniti di un naturale prodotto scalare Hermitiano, ossia

$$\langle f, g \rangle = \int_E f \bar{g} dm.$$

La norma  $L^2$  è legata al prodotto scalare dall'ovvia relazione

$$\|f\|_2 = \langle f, f \rangle^{1/2}.$$

Gli spazi  $L^2(E)$  sono gli esempi prototipici dei cosiddetti **spazi di Hilbert**, ossia spazi vettoriali complessi su cui sia definito un prodotto scalare Hermitiano  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e che risultino completi nella metrica

$$d(x, y) := \langle x - y, x - y \rangle^{1/2} = \|x - y\|.$$

In particolare a noi interesseranno gli spazi  $L^2([a, b])$  e  $L^2(\mathbb{R})$ .

Per concludere la discussione iniziata nella Sezione (3.1), enunciamo il risultato che mostra come  $L^2([a, b])$  non sia altro che il completamento<sup>5</sup> di  $\widetilde{PC}([a, b])$  rispetto alla norma quadratica.

**Teorema 3.13.** *Per ogni  $f \in L^2([a, b])$  esiste una successione  $(f_n)_{n \geq 0}$  di funzioni continue su  $[a, b]$  che convergono ad  $f$  in norma  $L^2$ . Di fatto, le funzioni  $f_n$  possono essere scelte come restrizioni all'intervallo  $[a, b]$  di funzioni che sulla retta sono di classe  $C^\infty$ ; si può inoltre supporre che esse siano periodiche di periodo  $b - a$  oppure ancora che si annullino al di fuori di un intervallo sufficientemente ampio.*

Terminiamo questa sezione con una osservazione. Gli spazi di Lebesgue nei quali siamo interessati sono  $L^1(\mathbb{R})$  e  $L^2(\mathbb{R})$ , che denoteremo semplicemente  $L^1$  e  $L^2$ . È importante sapere che non vi sono relazioni insiemistiche tra questi due spazi: le inclusioni  $L^1 \subset L^2$  e  $L^1 \supset L^2$  sono entrambe false, come mostrano i seguenti esempi.

$$f(x) = \begin{cases} x^{-2/3} & \text{se } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x^{-2/3} & \text{se } x > 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

È facile verificare che  $f \in L^1 \setminus L^2$  e  $g \in L^2 \setminus L^1$ . Viceversa, valgono i seguenti fatti:

(i) Se  $f \in L^1$  è limitata, allora  $f \in L^2$ . Infatti:

$$|f(x)| \leq M \implies \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}} M|f(x)| dx = M\|f\|_1.$$

(ii) Se  $f \in L^2$  è nulla fuori da un intervallo, allora  $f \in L^1$ . Infatti per Cauchy-Schwartz

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx &= \int_{[a,b]} |f(x)| dx = \int_{[a,b]} 1 \cdot |f(x)| dx \\ &\leq (b-a)^{1/2} \left( \int_{[a,b]} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} = (b-a)^{1/2} \|f\|_2. \end{aligned}$$

### Esercizi.

**9.** Si completi la dimostrazione del punto (a) del Teorema 3.11, cioè il caso  $p = 1$  e  $q = \infty$ .

**10.** Si completi la dimostrazione del punto (b) del Teorema 3.11, cioè il caso  $p = \infty$ .

**11.** Sia  $f$  definita su  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ . Si supponga che per quasi ogni  $y \in \mathbb{R}^m$  la funzione  $x \mapsto f(x, y)$  sia in  $L^p(\mathbb{R}^n)$ , con  $1 \leq p \leq \infty$ , e che la funzione  $y \mapsto \|f(\cdot, y)\|_p$  sia in  $L^1(\mathbb{R}^m)$  per quasi ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ . Allora la funzione  $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dy$  sta in  $L^p(\mathbb{R}^n)$  e vale la seguente **diseguaglianza integrale di Minkowski**:

$$(3.10) \quad \left\| \int_{\mathbb{R}^m} f(\cdot, y) dy \right\|_p \leq \int_{\mathbb{R}^m} \|f(\cdot, y)\|_p dy.$$

<sup>5</sup>Il completamento di uno spazio metrico è il più piccolo spazio metrico completo che lo contiene. Esso esiste sempre.

**12.** Provare che se  $1 \leq p < \infty$ , le traslazioni sono continue in  $L^p$ , ossia: se  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  e  $z \in \mathbb{R}^n$ , allora  $\|\tau_{y+z}f - \tau_y f\|_p \rightarrow 0$  per  $z \rightarrow 0$ , per ogni  $y \in \mathbb{R}^n$ . La notazione è  $\tau_y f(x) = f(x - y)$ .

**13.** Provare che se  $f_n \in L^2([a, b])$  e se la successione  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge ad  $f$  in norma  $L^2$ , allora anche  $\langle f_n, g \rangle \rightarrow \langle f, g \rangle$  per ogni  $g \in L^2([a, b])$ .

**14.** Si provi che  $|\|f\|_2 - \|g\|_2| \leq \|f - g\|_2$  per ogni  $f, g \in L^2([a, b])$ . Se ne deduca che se la successione  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge ad  $f$  in norma  $L^2$ , allora anche  $\|f_n\|_2 \rightarrow \|f\|_2$ .

**3.4. Serie di Fourier in  $L^2$ .** Possiamo ora riprendere il tema del capitolo precedente, in particolare il punto di vista sviluppato nella Sezione 2.1, ed analizzarlo con gli strumenti di cui siamo ora in possesso. Il primo passo consiste nell'estendere la disuguaglianza di Bessel (2.7).

**Teorema 3.14** (Disuguaglianza di Bessel II). *Sia  $\{\phi_n : n = 1, 2, \dots\}$  un sistema ortonormale in  $L^2([a, b])$  e sia  $f \in L^2([a, b])$ . Vale allora la seguente disuguaglianza:*

$$(3.11) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \leq \|f\|_2^2.$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che

$$\langle f, \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \rangle = \overline{\langle f, \phi_n \rangle} \langle f, \phi_n \rangle = |\langle f, \phi_n \rangle|^2$$

e che per ogni  $N$  l'ortonormalità di  $\{\phi_n : n = 1, 2, \dots\}$  implica il Teorema di Pitagora nella forma

$$(3.12) \quad \left\| \sum_{n=1}^N \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\|_2^2 = \sum_{n=1}^N |\langle f, \phi_n \rangle|^2.$$

Ma allora

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| f - \sum_{n=1}^N \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\|_2^2 \\ &= \|f\|_2^2 - 2\Re \left\langle f, \sum_{n=1}^N \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\rangle + \left\| \sum_{n=1}^N \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\|_2^2 \\ &= \|f\|_2^2 - 2\Re \sum_{n=1}^N \overline{\langle f, \phi_n \rangle} \langle f, \phi_n \rangle + \sum_{n=1}^N |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \\ &= \|f\|_2^2 - \sum_{n=1}^N |\langle f, \phi_n \rangle|^2. \end{aligned}$$

Passando al limite per  $N \rightarrow +\infty$  si ottiene il risultato.  $\square$

Il problema che stiamo cercando di risolvere è se dato un sistema ortonormale  $\{\phi_n : n = 1, 2, \dots\}$  in  $L^2([a, b])$  e data  $f \in L^2([a, b])$  risulti

$$(3.13) \quad f = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$$

in qualche senso. Stabiliamo subito che una **serie di Fourier** generalizzata quale quella al membro destro di (3.13) converge nel senso più naturale. Useremo in modo cruciale la completezza di  $L^2([a, b])$ .

**Lemma 3.15.** *Se  $f \in L^2([a, b])$  e  $\{\phi_n : n = 1, 2, \dots\}$  è un qualunque sistema ortonormale in  $L^2([a, b])$ , allora la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$  converge nella norma di  $L^2([a, b])$  ed inoltre*

$$\left\| \sum_{n=1}^{+\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\|_2 \leq \|f\|_2.$$

**DIMOSTRAZIONE.** La diseuguaglianza di Bessel (3.11) garantisce che la serie  $\sum_{n=1}^N |\langle f, \phi_n \rangle|^2$  converge e quindi il Teorema di Pitagora 3.12 mostra che siccome

$$\left\| \sum_{n=N}^{N+k} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\|_2^2 = \sum_{n=N}^{N+k} |\langle f, \phi_n \rangle|^2,$$

le somme parziali della serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$  costituiscono una successione di Cauchy in  $L^2([a, b])$ . Siccome  $L^2([a, b])$  è completo per il Teorema 3.12, sappiamo che tali ridotte convergono e che quindi la serie in questione converge ad un elemento di  $L^2([a, b])$ . Infine, una ulteriore applicazione del Teorema di Pitagora e della diseuguaglianza di Bessel forniscono

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\|_2^2 &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{n=1}^N \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\|_2^2 \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \\ &\leq \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

Estraendo la radice quadrata si ha l'asserto.  $\square$

Una condizione palesemente necessaria affinché (3.13) sia vera per ogni  $f \in L^2$  è che il sistema ortonormale sia il più grande possibile, nel senso che non ci deve essere alcuna  $f \in L^2$  che sia diversa da zero e ortogonale a tutte le  $\phi_n$ , altrimenti il membro destro è nullo e quello sinistro no. Inoltre, se (3.13) vale e se il Teorema di Pitagora si estende alle somme infinite, allora la diseuguaglianza di Bessel dovrebbe essere una uguaglianza. Abbiamo in effetti il seguente risultato centrale della teoria  $L^2$  delle serie di Fourier.

**Teorema 3.16.** *Sia  $\{\phi_n : n = 1, 2, \dots\}$  un sistema ortonormale in  $L^2([a, b])$ . Le condizioni seguenti sono equivalenti:*

- (a) se  $\langle f, \phi_n \rangle = 0$  per ogni  $n$ , allora  $f = 0$ ;
- (b) per ogni  $f \in L^2([a, b])$  si ha  $f = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$ , serie convergente in norma  $L^2$ ;

(c) per ogni  $f \in L^2([a, b])$  si ha l'eguaglianza di Parseval:

$$(3.14) \quad \|f\|_2^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle f, \phi_n \rangle|^2.$$

DIMOSTRAZIONE. Proveremo che (a)  $\Rightarrow$  (b)  $\Rightarrow$  (c)  $\Rightarrow$  (a).

“(a)  $\Rightarrow$  (b)” Data  $f \in L^2([a, b])$ , la sua serie di Fourier converge in norma  $L^2$  per il Lemma 3.15. Mostriamo che la somma della serie è  $f$  provando che la differenza è nulla. Ma

$$\left\langle f - \sum_{n=1}^{+\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n, \phi_m \right\rangle = \langle f, \phi_m \rangle - \sum_{n=1}^{+\infty} \langle f, \phi_n \rangle \langle \phi_n, \phi_m \rangle = \langle f, \phi_m \rangle - \langle f, \phi_m \rangle = 0$$

per ogni  $m$  e quindi, per ipotesi, la differenza  $f - \sum_{n=1}^{+\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$  è nulla.

“(b)  $\Rightarrow$  (c)” Se vale la (3.13), allora, detta  $S_N(f)$  la somma parziale della serie di Fourier, abbiamo  $S_N(f) \rightarrow f$ . Quindi, per la continuità della norma in  $L^2$  (si confronti con la Proposizione 3.3 e con l'Esercizio 3.15), si ha  $\|S_N(f)\|_2 \rightarrow \|f\|_2$  e dal Teorema di Pitagora segue

$$\|f\|_2^2 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{n=1}^N \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\|_2^2 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N |\langle f, \phi_n \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle f, \phi_n \rangle|^2.$$

“(c)  $\Rightarrow$  (a)” Se  $\langle f, \phi_n \rangle = 0$  per ogni  $n$ , allora (3.14) implica  $\|f\|_2^2 = 0$  e quindi  $f = 0$ .  $\square$

Un sistema ortonormale che soddisfa le proprietà (a), (b) e (c) si dice sistema ortonormale completo oppure **base ortonormale**. In questo caso i numeri  $\langle f, \phi_n \rangle$  si chiamano i **coefficienti di Fourier** di  $f$  rispetto alla base data. Alle volte è conveniente considerare sistemi  $\{\psi_n : n = 1, 2, \dots\}$  di vettori ortogonali che non sono però di norma unitaria in  $L^2([a, b])$ . In tale caso parleremo di base ortogonale se i vettori rinormalizzati  $\phi_n = \psi_n / \|\psi_n\|$  formano una base ortonormale, e via discorrendo. Il sistema trigonometrico considerato nel Capitolo 2 è evidentemente completo:

**Teorema 3.17.** *I sistemi*

$$\{e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\} \quad e \quad \{\cos(nx) : n = 0, 1, 2, \dots\} \cup \{\sin(nx) : n = 1, 2, \dots\}$$

sono basi ortogonali in  $L^2([-\pi, \pi])$ . *I sistemi*

$$\{\cos(nx) : n = 0, 1, 2, \dots\} \quad e \quad \{\sin(nx) : n = 1, 2, \dots\}$$

sono basi ortogonali in  $L^2([0, \pi])$ .

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo le funzioni  $\psi_n(x) = e^{inx}$ . Sia  $f \in L^2([-\pi, \pi])$ . Vogliamo provare che la serie di Fourier di  $f$  rispetto a questo sistema converge ad  $f$ . Sia allora  $\varepsilon > 0$  fissato. Per il Teorema 3.13 possiamo trovare una funzione  $\tilde{f}$  di classe  $C^\infty$  e  $2\pi$ -periodica tale che  $\|f - \tilde{f}\|_2 < \varepsilon/3$ . Siano

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \langle f, \psi_n \rangle, \quad \tilde{c}_n = \frac{1}{2\pi} \langle \tilde{f}, \psi_n \rangle$$

i coefficienti di Fourier di  $f$  e  $\tilde{f}$  (nel senso del Capitolo 2, ossia della formula (2.6)). Per il Teorema 2.17 di convergenza uniforme, la serie  $\sum \tilde{c}_n \psi_n$  converge uniformemente a  $\tilde{f}$ ,

quindi anche in  $L^2([-\pi, \pi])$  in virtù del Teorema 3.2. Pertanto, per  $N$  sufficientemente grande avremo

$$\left\| \tilde{f} - \sum_{n=-N}^N \tilde{c}_n \psi_n \right\|_2 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'altra parte, dal Teorema di Pitagora e la disuguaglianza di Bessel risulterà

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=-N}^N \tilde{c}_n \psi_n - \sum_{n=-N}^N c_n \psi_n \right\|_2^2 &\leq \sum_{n=-N}^N |\tilde{c}_n - c_n|^2 \\ &\leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\tilde{c}_n - c_n|^2 \\ &\leq \|\tilde{f} - f\|_2^2 < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^2. \end{aligned}$$

Quindi, dal momento che

$$f - \sum_{n=-N}^N c_n \psi_n = (f - \tilde{f}) + \left(\tilde{f} - \sum_{n=-N}^N \tilde{c}_n \psi_n\right) + \left(\sum_{n=-N}^N \tilde{c}_n \psi_n - \sum_{n=-N}^N c_n \psi_n\right),$$

avremo

$$\left\| f - \sum_{n=-N}^N c_n \psi_n \right\|_2 < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

il che prova la completezza di  $\{e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\}$  in  $L^2([-\pi, \pi])$ . La completezza di  $\{\cos(nx) : n = 0, 1, 2, \dots\} \cup \{\sin(nx) : n = 1, 2, \dots\}$  ne è una riformulazione, mentre la completezza di  $\{\cos(nx) : n = 0, 1, 2, \dots\}$  e  $\{\sin(nx) : n = 1, 2, \dots\}$  in  $L^2([0, \pi])$  si ottiene considerando estensioni pari o dispari di  $f \in L^2([0, \pi])$  a  $[-\pi, \pi]$ .  $\square$

Tenendo conto delle rinormalizzazioni necessarie, l'eguaglianza di Parseval (3.14) prende la forma

$$(3.15) \quad \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \pi \left( \frac{1}{2} |a_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \right)$$

per  $f \in L^2([-\pi, \pi])$ , dove i coefficienti di Fourier  $a_n$ ,  $b_n$  e  $c_n$  sono definiti da (2.5) e (2.6). Se invece  $f \in L^2([0, \pi])$ , avremo

$$(3.16) \quad \int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{2} |a_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 \right) = \frac{\pi}{2} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|^2 \right)$$

dove i coefficienti di Fourier  $a_n$ ,  $b_n$  sono definiti nel Lemma 2.4.

Riassumiamo i principali risultati ottenuti sulla convergenza delle serie di Fourier. La serie di Fourier di una funzione periodica  $f$  converge ad  $f$ :

- (T) assolutamente, uniformemente ed in norma  $L^2$  se  $f \in C(\mathbb{R}) \cap PS(\mathbb{R})$ ;
- (P) puntualmente ed in norma  $L^2$  se  $f \in PS(\mathbb{R})$ ;
- (N) in norma  $L^2$  se  $f \in L^2([a, b])$ .

**Esercizi.**

**15.** Provare che se  $\{\phi_n : n = 1, 2, \dots\}$  è un sistema ortonormale in  $L^2([a, b])$  e  $c > 0$ ,  $d \in \mathbb{R}$ , allora le funzioni  $\psi_n = \sqrt{c}\phi_n(cx + d)$  formano un sistema ortonormale in  $L^2\left(\left[\frac{a-d}{c}, \frac{b-d}{c}\right]\right)$ .

**16.** Provare che se  $\{\phi_n : n = 1, 2, \dots\}$  è un sistema ortonormale in  $L^2([a, b])$ , allora

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, \phi_n \rangle \overline{\langle g, \phi_n \rangle}$$

per ogni  $f, g \in L^2([a, b])$ . Si noti che per  $f = g$  questa è l'uguaglianza di Parseval.

**17.** Provare che se  $f \in C^1(\mathbb{R})$  è periodica di periodo  $2\pi$  e a valori reali, allora  $f$  e  $f'$  sono ortogonali in  $L^2([-\pi, \pi])$ .

## 4. LA TRASFORMATA DI FOURIER

**4.1. Espansioni e integrali di Fourier.** Supponiamo che  $f$  sia una funzione su  $\mathbb{R}$ . Per ogni  $L > 0$  possiamo espandere  $f$  in serie di Fourier nell'intervallo  $[-L, L]$ . Ci chiediamo che cosa succede quando  $L \rightarrow +\infty$ . A questo scopo, estendiamo  $f$  per periodicità ottenendo una funzione  $2L$ -periodica e poniamo

$$g(y) = 2L \cdot f(yL/\pi),$$

cosicché  $g$  è  $2\pi$ -periodica. Posto quindi come in (2.2) e (2.6)

$$g(y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{iny}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(y) e^{-iny} dy.$$

ed effettuato il cambio di variabile  $x = (L/\pi)y$  otteniamo

$$f(x) = \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{n,L} e^{i\pi n x/L}, \quad c_{n,L} = \int_{-L}^L f(x) e^{-i\pi n x/L} dx.$$

Posto ancora  $\Delta\xi = \pi/L$  e  $\xi_n = n\Delta\xi$ , abbiamo

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{n,L} e^{i\xi_n x} \Delta\xi, \quad c_{n,L} = \int_{-L}^L f(x) e^{-i\xi_n x} dx.$$

Supponiamo ora che la funzione originaria  $f$  tenda a zero molto rapidamente per  $x \rightarrow \pm\infty$ , per modo che i coefficienti  $c_{n,L}$  non cambieranno molto se estendiamo l'intervallo di integrazione, cioè

$$c_{n,L} \approx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi_n x} dx := \hat{f}(\xi_n).$$

Pertanto

$$f(x) \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi_n) e^{i\xi_n x} \Delta\xi, \quad \text{per } |x| < L.$$

Quest'ultima espressione è formalmente una somma di Riemann: se adesso consideriamo il limite per  $L \rightarrow +\infty$  dovremmo ottenere le formule

$$(4.1) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi, \quad \text{con } \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx.$$

Gli argomenti utilizzati sono assolutamente *non* rigorosi, ma conducono alla giusta formalizzazione. La funzione  $\hat{f}$  si chiama la trasformata di Fourier di  $f$  e la formula (4.1) si chiama la formula di inversione di Fourier.

**Convenzioni.** In questo capitolo considereremo primariamente funzioni definite in  $\mathbb{R}^n$ . Scriveremo quindi  $L^p$  in luogo di  $L^p(\mathbb{R}^n)$ ; analogamente, gli integrali  $\int f(x) dx$  andranno intesi come integrali di Lebesgue  $\int_{\mathbb{R}^n} f dm$ . Introduciamo inoltre le seguenti notazioni. Un multi-indice  $\alpha$  è una  $n$ -upla di interi non-negativi  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , la cui lunghezza è l'intero non-negativo  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ . Se  $x \in \mathbb{R}^n$ , scriveremo

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n},$$

e, per quanto riguarda le derivate parziali, adotteremo le notazioni

$$\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_n^{\alpha_n}.$$

Se  $n = 1$  allora useremo indici latini, ossia  $\partial^\alpha$  sarà piuttosto  $d^j/dx^j$  con  $j \geq 0$  intero.

**4.2. Convoluzioni.** Se  $f$  e  $g$  sono funzioni definite in  $\mathbb{R}^n$  il loro prodotto di convoluzione, o più brevemente la loro **convoluzione**, è la funzione definita da

$$f * g(x) = \int f(x-y)g(y) dy,$$

ogniquale volta l'integrale (di Lebesgue) esista. La convoluzione è assolutamente convergente sotto ipotesi di varia natura, come ora andiamo ad illustrare.

(i) Se  $f \in L^1$  e  $g \in L^\infty$ , allora

$$\int |f(x-y)g(y)| dy \leq \|g\|_\infty \int |f(x-y)| dy = \|g\|_\infty \|f\|_1;$$

(ii) se  $g \in L^1$  e  $f \in L^\infty$  si ragiona in modo analogo

(iii) se  $f$  e  $g$  sono entrambe in  $L^2$ , allora per Cauchy-Schwartz

$$\int |f(x-y)g(y)| dy \leq \left( \int |f(x-y)|^2 dy \right)^{1/2} \left( \int |g(y)|^2 dy \right)^{1/2} = \|f\|_2 \|g\|_2;$$

(iv) se  $f \in PC(\mathbb{R})$  e  $g$  è limitata e a supporto in  $[a, b]$ , allora  $f * g(x)$  esiste per ogni  $x$  poiché la funzione  $y \mapsto f(x-y)$  è anch'essa limitata in  $[a, b]$  per ogni  $x$ ;

(v) si può provare che se  $f$  e  $g$  sono entrambe in  $L^1$ , allora  $f * g(x)$  esiste per quasi ogni  $x$  ed inoltre  $f * g \in L^1$ . Per una dimostrazione si veda ad esempio [F3] oppure l'Esercizio 1.

La lista precedente potrebbe essere estesa, ma nel presente contesto è più che sufficiente. Non è difficile verificare i fatti seguenti:

**Proposizione 4.1.** *La convoluzione soddisfa le usuali regole algebriche del prodotto:*

- (i)  $f * (\alpha g + \beta h) = \alpha(f * g) + \beta(f * h)$ ;
- (ii)  $f * g = g * f$ ;
- (iii)  $f * (g * h) = (f * g) * h$ .

Una proprietà cruciale della convoluzione nelle applicazioni alla teoria delle equazioni differenziali è la possibilità di “far cadere” la derivata di una convoluzione su uno dei due fattori a scelta:

**Proposizione 4.2.** *Si supponga  $f$  di classe  $C^1$  con derivate parziali limitate e  $g \in L^1$ . Allora  $f * g$  è di classe  $C^1$  e  $\partial_k(f * g) = (\partial_k f) * g$ . Analogamente, se  $g$  è di classe  $C^1$  con derivate parziali limitate e  $f \in L^1$ , allora  $\partial_k(f * g) = f * (\partial_k g)$ .*

DIMOSTRAZIONE. Derivando sotto il segno di integrale, ossia usando il Teorema 3.9:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \int f(x-y)g(y) dy = \int \frac{\partial}{\partial x_k} (f(x-y)g(y)) dy = \int \partial_k f(x-y)g(y) dy.$$

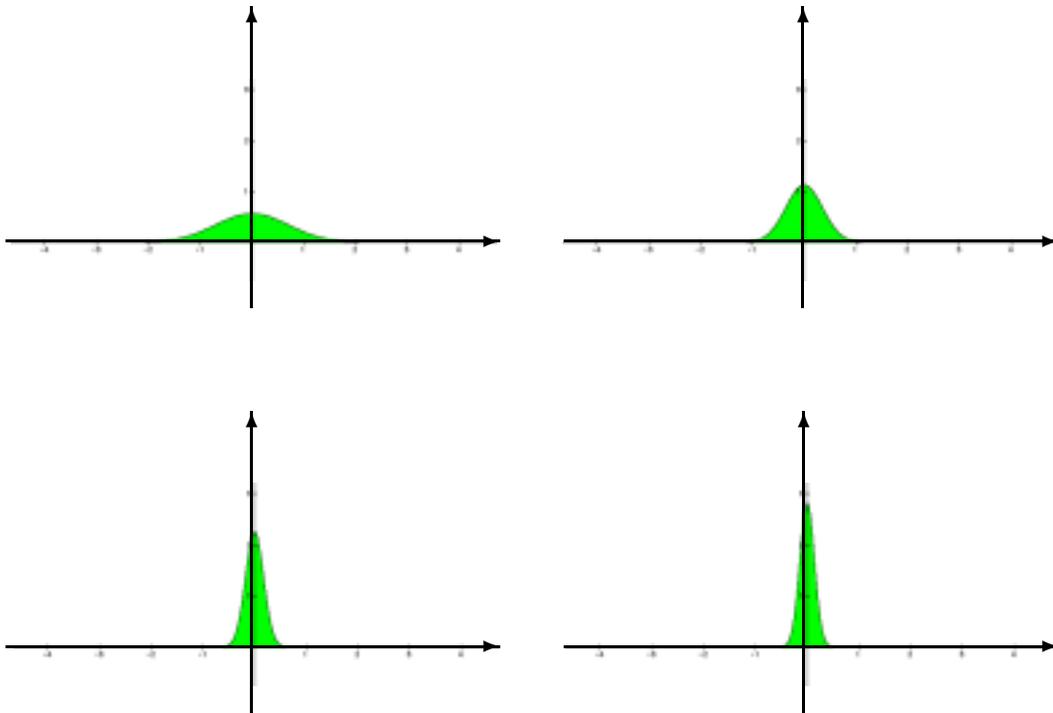
Poiché la convoluzione è commutativa, lo stesso argomento vale nel caso in cui si scambino i ruoli di  $f$  e  $g$ .  $\square$

Un aspetto nel quale la convoluzione è diversa dall'usuale moltiplicazione è l'assenza di una funzione che svolga il ruolo di 1, cioè tale che  $1 * f = f$  per ogni  $f$ . Questo ruolo è in realtà svolto dalla  $\delta$  di Dirac,<sup>6</sup> che però non è propriamente una funzione. A questa difficoltà si può ovviare mediante le cosiddette **identità approssimate**, ossia successioni  $(g_n)$  tali che  $f * g_n \rightarrow f$  quando  $n \rightarrow +\infty$ , in un senso che ora rendiamo preciso. Sia  $g \in L^1$  e sia  $t > 0$ . Poniamo

$$(4.2) \quad g_t(x) = t^{-n} g(t^{-1}x).$$

Al tendere di  $t$  a zero, il grafico di  $g$  diviene sempre più compresso orizzontalmente e dilatato verticalmente. Tuttavia, il suo integrale resta costante:

$$\int g_t dx = \int t^{-1} g(x/t) dx = \int g(y) dy.$$



In figura sono indicate  $G_1$ ,  $G_{1/2}$ ,  $G_{1/4}$  e  $G_{1/5}$  per la funzione  $G$  definita in (4.4).

**Teorema 4.3.** *Sia  $g \in L^1$  tale che  $\int g(y) dy = 1$ .*

- (i) *Se  $f \in L^p$  con  $1 \leq p < \infty$ , allora  $f * g_t \rightarrow f$  in  $L^p$  per  $t \rightarrow 0$ ;*
- (ii) *se  $f$  è limitata e uniformemente continua, allora  $f * g_t \rightarrow f$  uniformemente per  $t \rightarrow 0$ ;*
- (iii) *se  $f \in L^\infty$  è continua nell'aperto  $\mathcal{U}$ , allora  $f * g_t \rightarrow f$  per  $t \rightarrow 0$  uniformemente sui sottoinsiemi compatti di  $\mathcal{U}$ .*

<sup>6</sup>Si veda a questo riguardo la Sezione 5.3

DIMOSTRAZIONE. Ponendo  $y = tz$ , abbiamo

$$\begin{aligned} f * g_t(x) - f(x) &= \int [f(x - y) - f(x)] g_t(y) dy \\ &= \int [f(x - tz) - f(x)] g(z) dz \\ &= \int [\tau_{tz}f(x) - f(x)] g(z) dz, \end{aligned}$$

ove  $\tau_a f(t) = f(t - a)$ . Applichiamo ora la disuguaglianza integrale di Minkowski (si veda l'Esercizio 11 della Sezione 3.3) e otteniamo

$$\|f * g_t - f\|_p \leq \int \|\tau_{tz}f - f\|_p |g(z)| dz.$$

Ora,  $\|\tau_{tz}f - f\|_p \leq 2\|f\|_p$  per l'invarianza dell'integrale di Lebesgue rispetto alle traslazioni ed inoltre  $\|\tau_{tz}f - f\|_p \rightarrow 0$  per ogni fissato  $z$ , per la continuità delle traslazioni in  $L^p$  (si veda l'Esercizio 12 della Sezione 3.3). Per convergenza dominata segue l'asserto (i).

La dimostrazione di (ii) è esattamente la stessa, purché si sostituisca la norma  $L^p$  con la norma  $\sup|\cdot|$ : la stima  $\sup|f * g_t - f| \leq \|g\|_1 \sup|f|$  è chiara, ed inoltre  $\sup|f * g_t - f| \rightarrow 0$  per l'uniforme continuità di  $f$ .

Per quanto riguarda (iii), si fissi  $\varepsilon > 0$  e poi un compatto  $E \subset \mathbb{R}^n$  in modo che  $\int_{\mathbb{R}^n \setminus E} |g| < \varepsilon$ . Sia  $K \subset \mathcal{U}$  un compatto fissato. Per  $t$  sufficientemente piccolo avremo  $x - tz \in \mathcal{U}$  per ogni  $x \in K$  ed ogni  $z \in E$ , cosicché dalla compattezza di  $K$  si avrà

$$(4.3) \quad \sup_{x \in K, z \in E} |f(x - tz) - f(x)| < \varepsilon$$

per ogni  $t$  abbastanza piccolo. Ma allora

$$\begin{aligned} \sup_{x \in K} |f * g_t(x) - f(x)| &= \sup_{x \in K} \left( \int_E + \int_{\mathbb{R}^n \setminus E} \right) |f(x - tz) - f(x)| |g(z)| dz \\ &\leq \varepsilon \int |g(z)| dz + 2\|f\|_\infty \varepsilon, \end{aligned}$$

da cui segue (iii). □

Un classico esempio di funzione  $g$  che soddisfa le ipotesi del teorema precedente è la funzione **Gaussiana normalizzata**

$$(4.4) \quad G(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$$

Altri classici esempi sono il **nucleo di Poisson**

$$P(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

e la funzione a campana normalizzata

$$(4.5) \quad K(x) = \begin{cases} C^{-1} \exp(-1/(1-x^2)) & \text{se } |x| < 1, \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}, \quad C = \int_{-1}^1 e^{-1/(1-x^2)} dx.$$

Possiamo enunciare un risultato di grande utilità in analisi: la cosiddetta **densità** di  $C_c^\infty$  in tutti gli spazi di Lebesgue  $L^p$  con  $1 \leq p < \infty$ . Gli elementi di  $C_c^\infty$  sono le funzioni indefinitamente differenziabili **a supporto compatto**. Nonostante abbiamo già fatto riferimento a questa nozione, è bene chiarire che il supporto di una funzione  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  è la chiusura di  $\{x \in A : f(x) \neq 0\}$ , ossia il più piccolo chiuso di  $\mathbb{R}^n$  che lo contiene:

$$\text{supp}(f) := \overline{\{x \in A : f(x) \neq 0\}}.$$

Evidentemente, le funzioni a supporto compatto sono nulle al di fuori di una palla di raggio sufficientemente grande.

**Corollario 4.4.** *Sia  $f \in L^p$  con  $1 \leq p < \infty$ . Allora, per ogni fissato  $\varepsilon > 0$  esiste una funzione  $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  tale che  $\|f - g\|_p < \varepsilon$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $f \in L^p$  e sia  $\varepsilon > 0$  fissato. Possiamo scrivere  $f = g + h$ , dove  $g$  ha supporto compatto e  $\|h\|_p < \varepsilon/2$ : basta prendere come  $g = f\chi_n$  con  $n$  abbastanza grande, dove  $\chi_n$  è la funzione caratteristica della palla di centro l'origine e raggio  $n$  e applicare la convergenza dominata alla successione di funzioni  $|f|^p\chi_n$ .

Sia  $K$  come in (4.5), e si ponga  $g_t = g * K_t$ . È chiaro che  $g_t \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  e, in virtù del punto (i) del Teorema 4.3, abbiamo  $\|g - g_t\|_p \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow 0$ . Inoltre  $\|f - g_t\|_p \leq \|g - g_t\|_p + \|h\|_p < \|g - g_t\|_p + \varepsilon/2$ , e quindi se si sceglie  $t$  in modo che  $\|g - g_t\|_p < \varepsilon/2$  si ha l'asserto.  $\square$

### Esercizi.

1. Si supponga noto che se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  è misurabile, allora anche  $(x, t) \mapsto f(x - t)$  è misurabile come funzione definita su  $\mathbb{R}^2$  (si veda il punto (xi) della Sezione 3.2).

(i) Provare che se  $f$  e  $g$  sono funzioni non-negative in  $L^1(\mathbb{R})$ , allora la loro convoluzione è definita quasi ovunque e si ha

$$\int_{\mathbb{R}} (f * g)(x) dx = \left[ \int_{\mathbb{R}} f(x) dx \right] \left[ \int_{\mathbb{R}} g(x) dx \right];$$

(ii) Provare che se  $f$  e  $g$  sono in  $L^1(\mathbb{R})$ , allora la loro convoluzione è definita quasi ovunque, soddisfa  $|f * g| \leq |f| * |g|$  e si ha:

$$(4.6) \quad \|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

2. Provare, utilizzando (3.10) che per ogni  $p \in [1, \infty]$  si ha  $L^1(\mathbb{R}^n) * L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ , ossia che date  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  e  $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$  allora  $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ .

3. Provare la Proposizione 4.1.

4. Provare la stima (4.3).

5. Provare che se  $f \in L^p$  con  $1 \leq p < \infty$  e se  $\varepsilon > 0$  è fissato, possiamo scrivere  $f = g + h$ , dove  $g$  ha supporto compatto e  $\|h\|_p < \varepsilon/2$ . (Si veda il Corollario 4.4).

6. Provare che la convoluzione  $g * K_t$  definita nella dimostrazione del Corollario 4.4 è effettivamente in  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

7. Provare che se  $1 \leq p < q < r \leq \infty$ , allora  $L^q \subset L^p + L^r$ , ossia: ogni  $f \in L^q$  è la somma di una funzione in  $L^p$  ed una funzione in  $L^r$ . (Questo fatto è nello spirito dell'Esercizio (5); si ponga  $E = \{x : |f(x)| > 1\}$  e  $g = f\chi_E \dots$ )

8. Provare che se  $1 \leq p < q < r \leq \infty$ , allora  $L^p \cap L^r \subset L^q$  e più precisamente  $\|f\|_q \leq \|f\|_p^\lambda \|f\|_r^{1-\lambda}$  dove  $\lambda \in (0, 1)$  è definita da

$$q^{-1} = \lambda p^{-1} + (1 - \lambda)r^{-1}, \quad \text{ossia } \lambda = (q^{-1} - r^{-1})/(p^{-1} - r^{-1}).$$

(Se  $r = \infty$  si osservi che  $|f|^q \leq \|f\|_\infty^{q-p}|f|^p$  e che  $\lambda = p/q$ ; se invece  $r < \infty$  si usi Hölder con esponenti coniugati  $p/\lambda q$  e  $r/(1 - \lambda)q$ , scrivendo  $|f|^q = |f|^{\lambda q}|f|^{(1-\lambda)q} \dots$ )

4.3. **La trasformata di Fourier in  $L^1$ .** Supponiamo  $f \in L^1 = L^1(\mathbb{R}^n)$ . Definiamo la sua trasformata di Fourier mediante

$$(4.7) \quad \hat{f}(\xi) = \int f(x)e^{-i\xi x} dx,$$

dove  $\xi x = \xi \cdot x = \langle \xi, x \rangle$  è il prodotto scalare in  $\mathbb{R}^n$ . Naturalmente, continua a valere la convenzione stabilita subito prima della Sezione 4.2. È chiaro che

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \int |f(x)e^{-i\xi x}| dx = \int |f(x)| dx = \|f\|_1,$$

cosicché l'integrale (4.7) è assolutamente convergente per ogni  $\xi$ . Inoltre, poiché

$$|f(x)e^{-i\xi x} - f(x)e^{-i\eta x}| \leq 2|f(x)|,$$

il teorema di convergenza dominata ci assicura che  $\xi \mapsto \hat{f}(\xi)$  è **una funzione continua**. Per praticità, denoteremo alle volte con  $\mathcal{F}$  la trasformata di Fourier, ossia

$$(4.8) \quad \mathcal{F}f = \hat{f}$$

Infine, ci sarà utile lo spazio  $C_0 = C_0(\mathbb{R}^n)$  delle funzioni continue che tendono a zero all'infinito.<sup>7</sup> Naturalmente, si intende che  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  tende a zero all'infinito se

$$\text{per ogni } K > 0 \text{ esiste } R > 0 \text{ tale che se } \|x\| > R, \text{ allora } |f(x)| \leq K.$$

Il teorema che segue riassume le principali proprietà della trasformata di Fourier in  $L^1$ .

**Teorema 4.5.** *Sia  $f \in L^1$ .*

(i) *Per ogni  $a \in \mathbb{R}^n$  sia al solito  $\tau_a f(x) = f(x - a)$ . Allora*

$$\widehat{(\tau_a f)}(\xi) = e^{-ia\xi} \hat{f}(\xi) \quad e \quad \mathcal{F}(e^{ia(\cdot)} f)(\xi) = \tau_a \hat{f}(\xi) = (\mathcal{F}f)(\xi - a).$$

(ii) *Se  $\delta > 0$  e  $f_\delta(x) = \delta^{-n} f(x/\delta)$  come in (4.2), allora*

$$\widehat{f_\delta}(\xi) = \hat{f}(\delta\xi).$$

*Più in generale, se  $A \in GL(n, \mathbb{R})$ , allora*

$$\mathcal{F}(f \circ A) = |\det A|^{-1} (\mathcal{F}f \circ {}^t A^{-1}).$$

<sup>7</sup>Lo spazio  $C_0$  può essere anche definito come lo spazio delle funzioni continue  $f$  per le quali l'insieme  $f^{-1}([\varepsilon, +\infty))$  è compatto per ogni  $\varepsilon$ .

(iii) Se  $f$  è di classe  $C^k$  e se  $\partial^\alpha f \in L^1$  per  $|\alpha| \leq k$  e se  $\partial^\alpha f \in C_0$  per  $|\alpha| \leq k - 1$  allora

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi) = (i\xi)^\alpha (\mathcal{F}f)(\xi).$$

Se invece  $x \mapsto (x^\alpha f)(x) \in L^1$  per  $|\alpha| \leq k$ , allora  $\hat{f} \in C^k$  e

$$\partial^\alpha (\mathcal{F}f) = \mathcal{F}[(-i(\cdot))^\alpha f].$$

(iv) Se anche  $g \in L^1$ , allora

$$\mathcal{F}(f * g) = \hat{f}\hat{g}.$$

DIMOSTRAZIONE. (i) Mediante il cambio di variabili  $y = x - a$  si ottiene:

$$\begin{aligned} \widehat{(\tau_a f)}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(x - a) e^{-i\xi x} dx \\ &= \int f(y) e^{-i\xi(y+a)} dy \\ &= e^{-ia\xi} \int f(y) e^{-i\xi y} dy \\ &= e^{-ia\xi} \hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

L'altra uguaglianza in (i) e (ii) sono anch'esse ottenute mediante cambio di variabili.

(iii) Per le ipotesi fatte, è possibile integrare sotto il segno di integrale (Teorema 3.9):

$$\partial_j \hat{f}(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left( \int f(x) e^{-i\xi x} dx \right) = \int f(x) (-ix_j) e^{-i\xi x} dx,$$

e per induzione su  $|\alpha|$  anche

$$\partial^\alpha \hat{f}(\xi) = \int f(x) (-ix)^\alpha e^{-i\xi x} dx.$$

Questo prova la seconda formula in (iii). Per quanto riguarda la prima, nel caso  $n = 1$ , possiamo integrare per parti e poiché  $f$  tende a zero all'infinito

$$\widehat{(f')}(\xi) = \int f'(x) e^{-i\xi x} dx = f(x) e^{-i\xi x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int f(x) (-i\xi) e^{-i\xi x} dx = i\xi \hat{f}(\xi).$$

Il caso generale è lasciato per esercizio. Infine, per la (iv), applichiamo il Teorema di Fubini, ottenendo

$$\begin{aligned} \widehat{(f * g)}(\xi) &= \int \int f(x - y) g(y) dy e^{-i\xi x} dx \\ &= \int \int f(x - y) e^{-i\xi(x-y)} g(y) e^{-i\xi y} dx dy \\ &= \int \int f(z) e^{-i\xi z} g(y) e^{-i\xi y} dz dy \\ &= \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi). \end{aligned}$$

□

Calcoliamo la trasformata di Fourier di alcune funzioni importanti.

**Esempio 4.6.**

Consideriamo la funzione caratteristica  $\chi_a$  dell'intervallo  $|x| < a$  in  $\mathbb{R}$ . Calcolando:

$$\hat{\chi}_a(\xi) = \int_{-a}^a e^{-i\xi x} dx = \frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi} \Big|_{-a}^a = \frac{e^{-ia\xi} - e^{ia\xi}}{-i\xi} = 2 \left( \frac{\sin a\xi}{\xi} \right).$$

**Esempio 4.7.**

Sia  $f(x) = e^{-ax^2/2}$ , una Gaussiana non-normalizzata, dove  $a > 0$  ed  $x \in \mathbb{R}$ . Osserviamo che  $f$  soddisfa l'equazione differenziale  $f' + axf = 0$ . Applicando la trasformata di Fourier a questa uguaglianza e il Teorema 4.5, otteniamo  $i\xi \hat{f}(\xi) + ia(\hat{f})'(\xi) = 0$ . Risolvendo questa equazione si ottiene

$$\frac{(\hat{f})'(\xi)}{\hat{f}(\xi)} = -\frac{\xi}{a} \implies \log \hat{f}(\xi) = -\frac{\xi^2}{2a} + \log C \implies \hat{f}(\xi) = Ce^{-\xi^2/2a}.$$

Per valutare la costante  $C$ , poniamo  $\xi = 0$  e calcoliamo:

$$C = \hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2/2} dx = \sqrt{\frac{2}{a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}.$$

Ne segue che

$$\mathcal{F}(e^{-a(\cdot)^2/2})(\xi) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\xi^2/2a}.$$

Per  $n > 1$  si applica il teorema di Fubini per concludere che:

**Proposizione 4.8.** *Se  $G(x) = e^{-a\|x\|^2/2}$  con  $a > 0$ , allora  $\hat{G}(\xi) = (2\pi/a)^{n/2} e^{-\|\xi\|^2/2a}$ .*

Abbiamo già osservato che la trasformata di Fourier di una funzione in  $L^1$  è una funzione continua e limitata. In realtà si può dire qualcosa di più, ossia che una trasformata di Fourier tende a zero all'infinito.

**Lemma 4.9** (Riemann-Lebesgue).  $\mathcal{F}(L^1) \subset C_0$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo dapprima  $n = 1$  e  $f(x) = \sum_1^N c_j \chi_j(x)$  dove le  $\chi_j$  sono funzioni caratteristiche di intervalli limitati del tipo  $|x - x_j^0| < a_j$ . In questo caso, utilizzando il Teorema (4.5) parte (i), ed il calcolo svolto nell'esempio (4.6), otteniamo

$$\hat{\chi}_j(\xi) = 2e^{-ix_j^0 \xi} \left( \frac{\sin(a_j \xi)}{\xi} \right)$$

ed il risultato è ovvio. Nel caso di una funzione in  $L^1(\mathbb{R})$  qualunque, approssimiamo dapprima  $f \in L^1$  in norma  $L^1$  mediante una funzione  $g$  del tipo precedente, ossia in modo che, fissato  $\varepsilon > 0$ , si abbia  $\|f - g\|_1 < \varepsilon/2$  (questo è possibile attraverso un raffinamento dell'approssimazione considerata al punto (v) della Sezione 3.2). Ma allora si ha l'asserto per  $n = 1$  perché se per  $|\xi| > M$  risulta  $|\hat{g}(\xi)| < \varepsilon/2$ , allora per le stesse  $\xi$  si ha pure

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \left( \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\hat{f}(\xi) - \hat{g}(\xi)| \right) + |\hat{g}(\xi)| \leq \|f - g\|_1 + |\hat{g}(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

La dimostrazione del caso generale si può trovare nel Teorema (8.22) in [F3].  $\square$

**Esercizi.**

**9.** Provare che se  $f$  è a valori reali allora  $\hat{f}(-\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$  e che se  $f$  è pari allora  $\hat{f}$  è pari. Quindi, se  $f$  è reale e pari tale è anche  $\hat{f}$ .

**10.** Provare che se  $\hat{f}(\xi) = 2/i\xi$ , allora  $f(t) = t/|t|$ . Si supponga che  $f \in L^1(\mathbb{R})$  sia nulla per  $t < 0$ . Si provi che  $\Re \mathcal{F}f = H(\Im \mathcal{F}f)$  e  $\Im \mathcal{F}f = -H(\Re \mathcal{F}f)$ , dove  $H$  è la trasformata di Hilbert:

$$Hg(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{g(s)}{x-s} ds.$$

**11.** Provare la formula  $\mathcal{F}(f \circ A) = |\det A|^{-1} (\mathcal{F}f \circ {}^t A^{-1})$ , valida per ogni trasformazione lineare  $A \in GL(n, \mathbb{R})$ .

**12.** Terminare la dimostrazione del punto (iii) del Teorema 4.5, inserendo i dettagli.

**13.** Provare la Proposizione 4.8.

**14.** Provare che se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ammette derivata seconda e se  $f'$  e  $f''$  sono integrabili, allora  $f''$  è limitata e  $|\mathcal{F}f| \leq C/(1 + \xi^2)$ , cosicché  $\mathcal{F} \in L^1$ .

**15.** Provare che se  $f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^n f_j(x_j)$  allora  $\hat{f}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \prod_{j=1}^n \hat{f}_j(\xi_j)$ .

**4.4. La formula di inversione e la teoria  $L^2$ .** Ci proponiamo ora di ottenere la formula

$$(4.9) \quad f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi,$$

che già avevamo visto in modo del tutto informale per  $n = 1$ . Si osservi che, a parte il segno all'esponente, questa formula è identica a quella che definisce  $\hat{f}$ . Per provare la (4.9) bisogna aggirare essenzialmente due difficoltà. La prima consiste nel fatto che  $\hat{f}$  non è necessariamente  $L^1$ , come mostra il calcolo svolto nell'esempio (4.6). La seconda è che quand'anche  $\hat{f}$  fosse in  $L^1$ , la sostituzione

$$\int \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi = \int \int e^{i\xi(x-y)} f(y) dy d\xi$$

non è lecita perché l'integrale  $\int e^{i\xi(x-y)} d\xi$  è divergente. Un rimedio semplice consiste nel moltiplicare  $\hat{f}$  per una funzione di tipo *cut-off* per rendere i vari integrali convergenti e poi passare ad un limite opportuno che rimuove il cut-off. La funzione cut-off più usata (anche se non la sola!) è la Gaussiana

$$G_t(\xi) = e^{-t^2 \|\xi\|^2 / 2}.$$

Abbiamo in effetti il seguente:

**Teorema 4.10** (Inversione di Fourier). *Se  $f, \hat{f} \in L^1$ , allora  $f$  è continua e*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} (\mathcal{F}\mathcal{F}f)(-x)$$

vale per quasi<sup>8</sup> ogni  $x$ .

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo l'integrale

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} e^{-t^2 \|\xi\|^2/2} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \int e^{i\xi(x-y)} e^{-t^2 \|\xi\|^2/2} f(y) dy d\xi.$$

La presenza della Gaussiana rapidamente decrescente rende assolutamente convergente questo integrale iterato e in particolare è lecito scambiare l'ordine di integrazione. L'integrale in  $d\xi$  è già stato calcolato nell'esempio (4.7):

$$\int e^{i\xi(x-y)} e^{-t^2 \|\xi\|^2/2} d\xi = \mathcal{F}(e^{-t^2 \|\cdot\|^2/2})(y-x) = \frac{\sqrt{(2\pi)^n}}{t^n} e^{-\|x-y\|^2/2t^2}$$

e dunque arriviamo a

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} e^{-t^2 \|\xi\|^2/2} d\xi = \frac{1}{t^n \sqrt{(2\pi)^n}} \int f(y) e^{-\|x-y\|^2/2t^2} dy = f * \phi_t(x),$$

dove

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} e^{-\|x\|^2/2}, \quad \phi_t(x) = \frac{1}{t} \phi\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{1}{t^n \sqrt{(2\pi)^n}} e^{-\|x\|^2/2t^2}.$$

Vogliamo calcolare il limite per  $t \rightarrow 0$  sia a sinistra sia a destra dell'uguaglianza

$$(2\pi)^{-n} \int \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} e^{-t^2 \|\xi\|^2/2} d\xi = f * \phi_t(x)$$

appena provata. Siccome  $\int \phi = 1$ , per il Teorema (4.3) sappiamo che  $f * \phi_t \rightarrow f$  in norma  $L^1$  per  $t \rightarrow 0$ . D'altra parte

$$|\hat{f}(\xi) e^{i\xi x} e^{-t^2 \|\xi\|^2/2}| \leq |\hat{f}(\xi)|$$

e quindi se  $\hat{f} \in L^1$  possiamo applicare la convergenza dominata per valutare il limite a sinistra:

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} e^{-t^2 \|\xi\|^2/2} d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \lim_{t \rightarrow 0} (\hat{f}(\xi) e^{i\xi x} e^{-t^2 \|\xi\|^2/2}) d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi. \end{aligned}$$

Abbiamo perciò uguaglianza quasi ovunque  $(2\pi)^n f(x) = \mathcal{F}(\mathcal{F}f)(-x)$ . La continuità di  $f$  segue dal fatto che la precedente formula esibisce  $f$  come (la riflessa della) trasformata di Fourier di una funzione  $L^1$ .  $\square$

**Proposizione 4.11.** *Se  $f, g \in L^1$ , allora  $\int (\mathcal{F}f)g = \int f(\mathcal{F}g)$ .*

<sup>8</sup>Sappiamo che entrambi i membri dell'uguaglianza sono funzioni continue. Quindi, modificando  $f$  in un insieme di misura nulla possiamo assumere che l'uguaglianza valga per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ .

DIMOSTRAZIONE. Entrambi gli integrali sono uguali a  $\iint f(x)g(\xi)e^{-ix\xi} dx d\xi$ .  $\square$

Abbiamo finora sviluppato la teoria  $L^1$  della trasformata di Fourier, ma l'esperienza maturata con le serie di Fourier suggerisce che lo spazio  $L^2$  dovrebbe giocare anch'esso un ruolo importante, e così è. Vi è una difficoltà iniziale che deve essere superata: l'integrale  $\int f(x)e^{-ix\xi} dx$  può non convergere se  $f \in L^2$  ma  $f \notin L^1$ . L'osservazione chiave è che l'analogo della formula di Parseval (3.14) vale nel contesto della trasformata di Fourier.

**Teorema 4.12** (Plancherel). *La trasformata di Fourier definita in  $L^1 \cap L^2$  dall'integrale (4.7) si estende in modo unico ad una mappa lineare e bigettiva di  $L^2$  in  $L^2$  che soddisfa le identità di Parseval:*

$$\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g \rangle = (2\pi)^n \langle f, g \rangle, \quad \|\mathcal{F}f\|_2 = (2\pi)^{n/2} \|f\|_2 \quad \text{per ogni } f, g \in L^2.$$

DIMOSTRAZIONE. Se  $f, g$  e le loro trasformate di Fourier sono tutte in  $L^1$ , allora  $f$  e  $g$  sono continue, limitate e integrabili, e quindi appartengono anche a  $L^2$  (si veda l'Esercizio 8 della Sezione 4.2). Possiamo perciò applicare il Teorema 4.10 e ottenere

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \int f(x)\overline{g(x)} dx \\ &= (2\pi)^{-n} \int \int f(x)\overline{e^{i\xi \cdot x} \mathcal{F}g(\xi)} d\xi dx \\ &= (2\pi)^{-n} \int \int f(x)e^{-i\xi \cdot x} \overline{\mathcal{F}g(\xi)} dx d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int \mathcal{F}f(\xi)\overline{\mathcal{F}g(\xi)} d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g \rangle. \end{aligned}$$

Naturalmente questo implica entrambe le formule dell'enunciato per tutte le funzioni che stanno in  $\mathfrak{X} = \{f \in L^1 : \mathcal{F}f \in L^1\} \subset L^2$ . Ora, se  $f \in L^2$  è arbitraria, possiamo trovare una successione  $(f_n)_{n \geq 0}$  di elementi di  $\mathfrak{X}$  che converge ad  $f$  in  $L^2$ . Questo è vero perchè  $C_c^\infty \subset \mathfrak{X}$  e l'esistenza di una successione di elementi di  $C_c^\infty$  che converge ad  $f$  in  $L^2$  è garantita dal Corollario 4.4. Ma allora, per quanto appena visto

$$\|\mathcal{F}f_n - \mathcal{F}f_m\|_2 = (2\pi)^{n/2} \|f_n - f_m\|_2,$$

cosicchè la successione  $(\mathcal{F}f_n)_{n \geq 0}$  è di Cauchy in  $L^2$ . Poichè  $L^2$  è completo, essa ammette un (unico) limite, che definiamo come  $\mathcal{F}f$ . In tal modo il dominio di  $\mathcal{F}$  è esteso a tutto  $L^2$ . Si verifica facilmente che le formule continuano a valere per l'estensione definita. Resta solo da provare la surgettività. Ma questa segue dall'osservazione che il teorema Teorema 4.10 implica  $\mathcal{F}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}$ .  $\square$

### Esercizi.

**16.** Provare che se  $R$  è una rotazione di  $\mathbb{R}^n$ , allora la trasformata di Fourier commuta con  $R$ , cioè  $\mathcal{F}[f(Rx)] = (\mathcal{F}f)(Rx)$ .

**17.** Provare che  $\mathcal{F}[e^{-a|x|}] = 2a(\xi^2 + a^2)^{-1}$ .

**18.** Siano  $a$  e  $b$  numeri positivi. Provare le formule

$$\int \frac{\sin(at) \sin(bt)}{t^2} dt = \pi \min(a, b),$$

$$\int \frac{t^2}{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)} dt = \frac{\pi}{a + b}$$

usando il Teorema di Plancherel.

## 5. DISTRIBUZIONI

Il concetto di funzione ha visto trasformazioni profonde nel corso dei secoli. Dall'idea che una funzione sia definita attraverso formule algebriche si è giunti a quella del tardo secolo XIX, in cui una funzione è una regola più o meno arbitraria che assegna ad una "variabile"  $x$  un "valore"  $f(x)$ , sia esso numerico o meno. Persino quest'ultima nozione iniziò a dimostrarsi limitativa all'inizio del secolo XX, epoca nella quale si rese necessario manipolare oggetti che "*si comportano come funzioni, ma sono assai più singolari delle funzioni*". L'esempio più noto di un siffatto oggetto è la **delta di Dirac**, denotata impropriamente  $\delta(x)$ . Essa si comporta come una funzione sulla retta reale, nel senso che siamo portati a scrivere  $\delta(x)$ , con  $x \in \mathbb{R}$ , ma è assai più singolare di una funzione perché è individuata dalle seguenti proprietà:  $\delta(x) = 0$  per ogni  $x \neq 0$ , ma  $\int_{-a}^a \delta(x) dx = 1$  per ogni  $a > 0$ . Si può pensare che  $c\delta(x)$  rappresenti la densità di carica di una particella di carica  $c$  posizionata nell'origine dell'asse reale, un modello (sicuramente rozzo) di elettrone. Questa concettualizzazione può essere peraltro di grande aiuto, perché consente di esprimere la seconda proprietà: la carica globale di una regione che contiene l'origine è  $c$  mentre è nulla se non contiene  $c$ . D'altra parte, nessuna funzione  $\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  propriamente detta può godere delle proprietà precedenti: l'integrale (di Lebesgue) di una funzione che è sempre nulla tranne che nell'origine è zero, indipendentemente dal valore assegnato a  $\delta(0)$ .

Fu Laurent Schwartz [Sch] ad introdurre in modo rigoroso il concetto di distribuzione (o funzione generalizzata), nonostante esistano in letteratura approcci diversi dal suo. L'idea fondamentale di Schwartz consiste nel considerare **funzionali lineari continui su funzioni test**. Prima di passare ad una trattazione formale e rigorosa, presentiamo il cuore dell'idea di Schwartz. Se  $f$  è una funzione continua su  $\mathbb{R}$ , essa identifica un funzionale lineare sullo spazio  $C_c^\infty(\mathbb{R})$  mediante la semplice regola:

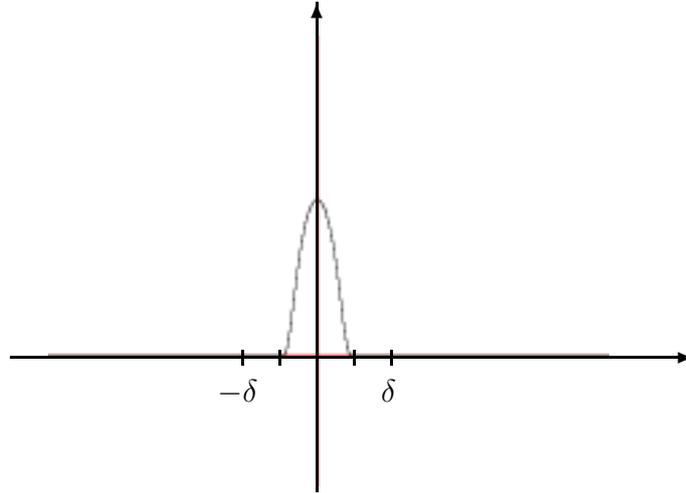
$$(5.1) \quad \phi \mapsto T_f(\phi) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x) dx, \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

Il funzionale lineare cui facciamo riferimento è la mappa  $T_f : C_c^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ . Esso è lineare nel senso che  $T_f(\alpha\phi + \beta\psi) = \alpha T_f(\phi) + \beta T_f(\psi)$ . La locuzione "funzioni test" si riferisce evidentemente allo spazio  $C_c^\infty(\mathbb{R})$  ed il senso da attribuirvi sarà chiaro tra breve. Un'osservazione importante è che la mappa  $T_f$  individua  $f$  completamente. Se infatti  $g$  è un'altra funzione continua tale che  $T_f = T_g$ , ossia tale che  $T_f(\phi) = T_g(\phi)$  per ogni funzione  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ , allora  $0 = T_f(\phi) - T_g(\phi) = T_{f-g}(\phi)$ . Sarà pertanto sufficiente mostrare che se  $h$  è continua e  $T_h(\phi) = 0$  per ogni funzione  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ , allora  $h(x) = 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Se così non fosse, si avrebbe ad esempio  $h(x_0) > 0$  per un certo  $x_0$  e, per permanenza del segno,  $h(x) > 0$  in un intervallo  $I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ . Selezioniamo allora una funzione  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  che sia positiva in  $(x_0 - \delta/2, x_0 + \delta/2)$  e sia nulla fuori da  $I_\delta$ . In questo modo, il prodotto  $h(x)\phi(x)$  risulterà ovunque non negativo, e in particolare sarà positivo in  $(x_0 - \delta/2, x_0 + \delta/2)$  e nullo fuori da  $I_\delta$ . Quindi

$$T_h(\phi) = \int_{\mathbb{R}} h(x)\phi(x) dx = \int_{I_\delta} h(x)\phi(x) dx > 0,$$

contro l'ipotesi che  $T_h = 0$ . Perciò necessariamente  $h = 0$ . Discorso analogo potrebbe farsi se  $h(x_0) < 0$ . In conclusione, se  $T_f = T_g$  con  $f$  e  $g$  continue, allora  $f = g$ . In

altri termini, la mappa  $f \mapsto T_f$  è iniettiva sullo spazio delle funzioni continue; quindi possiamo riguardare una funzione continua come il funzionale ad essa associato senza “confondere” funzioni continue diverse<sup>9</sup>. Ma si può dire molto di più. Mostriamo infatti che se si conosce il funzionale  $T_f$ , si possono recuperare i valori puntuali di  $f$ . Per provare questo, utilizziamo ancora (come abbiamo fatto nel paragrafo precedente) la possibilità di trovare funzioni  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  che si comportino come in figura.



Questo tipo di funzioni, note anche come *bump functions* o *funzioni a campana* sono pervasive nella teoria delle distribuzioni, e in realtà in tutta l’analisi. Nella prossima sezione procederemo alla costruzione esplicita di queste funzioni. Le proprietà che caratterizzano una funzione a campana sono solitamente la positività su un intervallo ed il fatto di avere supporto compatto, oltre naturalmente ad essere di classe  $C^\infty$ . Sia ora  $\phi$  una siffatta funzione, ovviamente integrabile. Possiamo assumere  $\int \phi = 1$ , in quanto è sempre possibile eventualmente dividere  $\phi$  per il valore (positivo) del suo integrale. Si consideri ora la traslata e dilatata di  $\phi$ , ovvero, per  $t > 0$  e per  $x, y \in \mathbb{R}$

$$\phi_{x,t}(y) = t^{-n} \phi(t^{-1}(x - y)).$$

Naturalmente,  $\phi_{x,t} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ , e il supporto di  $\phi_{x,t}$  è contenuto in  $(x - \delta, x + \delta)$ . Se supponiamo di conoscere l’integrale (5.1) per ogni funzione in  $C_c^\infty(\mathbb{R})$ , conosciamo in particolare l’integrale  $\int f(y) \phi_{x,t}(y) dy$  per ogni  $t > 0$  e per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Applichiamo ora (iii) del Teorema 4.3, ponendo  $\phi_t(x) = \phi_{x,t}(0)$  in coerenza con (4.2); abbiamo dunque

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int f(y) \phi_{x,t}(y) dy = \lim_{t \rightarrow 0} \int f(y) t^{-n} \phi(t^{-1}(x - y)) dy = \lim_{t \rightarrow 0} f * \phi_t(x) = f(x)$$

per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Perciò, se si conosce il valore di ogni *test* di  $f$  contro una funzione  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ , definito dall’integrale (5.1), si conosce il valore di  $f$  in ogni punto.

L’idea che ci apprestiamo a sviluppare può essere sinteticamente espressa dicendo che andremo a selezionare uno spazio di funzioni test e poi considereremo i funzionali

<sup>9</sup>Per ragioni di semplicità abbiamo qui sopra tacitamente assunto che le funzioni continue in esame abbiano valori reali. Discorsi completamente analoghi valgono per funzioni a valori complessi.

lineari su di esso. Due ulteriori chiarimenti preliminari sono necessari. Innanzitutto, non vi è un'unica scelta naturale per quanto riguarda lo spazio di funzioni test. Come vedremo, vi sono almeno tre spazi fondamentali: lo spazio  $\mathcal{E}$  delle funzioni  $C^\infty$ , lo spazio  $\mathcal{D}$  delle funzioni  $C_c^\infty$  e lo spazio di Schwartz  $\mathcal{S}$  delle funzioni a decrescenza rapida. Corrispondentemente, saranno definite diverse classi di funzionali. Infine, i funzionali lineari che considereremo dovranno soddisfare un requisito di **continuità**. Questo è un punto tecnicamente delicato che va trattato con cura. In estrema sintesi, dovremo specificare dapprima che cosa si intenda dire affermando che una successione di funzioni test  $(\phi_n)_{n \geq 0}$  converge ad una funzione test  $\phi$ , e poi richiedere al funzionale  $T$  la seguente proprietà di continuità: se  $\phi_n \rightarrow \phi$  nel senso chiarito, allora  $T(\phi_n) \rightarrow T(\phi)$  in  $\mathbb{C}$ . Solo i funzionali lineari continui saranno **distribuzioni**. Per quanto la maggior parte dei funzionali che si considerano in analisi la soddisfano in modo quasi ovvio, l'ipotesi di continuità svolge un ruolo di una certa rilevanza dal punto di vista teorico; in assenza di essa alcuni dei teoremi cessano di valere.

**5.1. Funzioni test.** Lo spazio delle funzioni test “*per antonomasia*” è lo spazio solitamente denotato  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  (o semplicemente  $\mathcal{D}$  se la dimensione è ovvia dal contesto). Esso è il più piccolo spazio di funzioni tra quelli che possono svolgere il ruolo di spazio test; i suoi elementi sono in un certo senso i “migliori”, che cioè godono delle proprietà più forti. Per questa ragione,  $\mathcal{D}$  è lo spazio di funzioni test, ed è ad esso che ci riferiremo come tale. Insiemeisticamente esso coincide con lo spazio  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  delle funzioni indefinitamente differenziabili in  $\mathbb{R}^n$  e a supporto compatto. La notazione  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  si riferisce allo spazio topologico<sup>10</sup> che si ottiene a partire da  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  mediante la seguente nozione di convergenza.

**Definizione 5.1.** Una successione  $(\phi_n)_{n \geq 0}$  di elementi di  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  converge in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  alla funzione  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  se e solo se le due seguenti proprietà sono soddisfatte:

- (i) esiste un compatto  $K \subset \mathbb{R}^n$  tale che  $\text{supp}(\phi) \subset K$  ed inoltre  $\text{supp}(\phi_n) \subset K$  per ogni  $n \geq 0$  ;
- (ii) per ogni multi-indice  $\alpha$  risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \phi_n(x) - \partial^\alpha \phi(x)| = 0,$$

ossia  $(\phi_n)_{n \geq 0}$  converge uniformemente a  $\phi$  assieme a tutte le sue derivate.

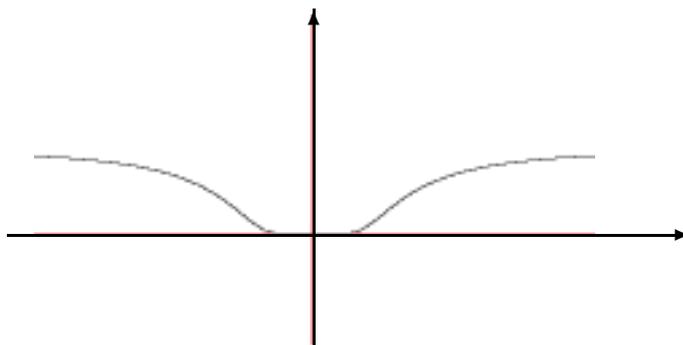
La condizione (i) della definizione precedente è importante e può naturalmente non essere soddisfatta. Si consideri ad esempio la successione definita a partire da una funzione a campana  $\phi$  su  $\mathbb{R}$  mediante la formula  $\phi_n(x) = \phi(x - n)/n$ . È chiaro che  $(\phi_n)_{n \geq 0}$  converge uniformemente a zero assieme a tutte le sue derivate, ma il supporto trasla a destra al crescere di  $n$ , e pertanto non esiste un compatto  $K$  che li contenga tutti. Invece  $\tilde{\phi}_n(x) = \phi(x)/n$  converge in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  alla funzione zero.

<sup>10</sup>Una discussione generale del concetto di spazio topologico esula dai nostri scopi. Il lettore può consultare [R1] oppure [F3] per le nozioni elementari, e [R2] per gli aspetti più profondi legati all'analisi. Possiamo dire con un po' di imprecisione che uno spazio topologico è un insieme  $X$  su cui sia definita una nozione di convergenza per le successioni  $(x_n)_{n \geq 0}$  con  $x_n \in X$ .

Costruiamo esplicitamente alcune funzioni di utilità pratica. Si consideri innanzitutto la funzione  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1)$  definita da

$$(5.2) \quad \psi(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2} & t \neq 0 \\ 0 & t = 0. \end{cases}$$

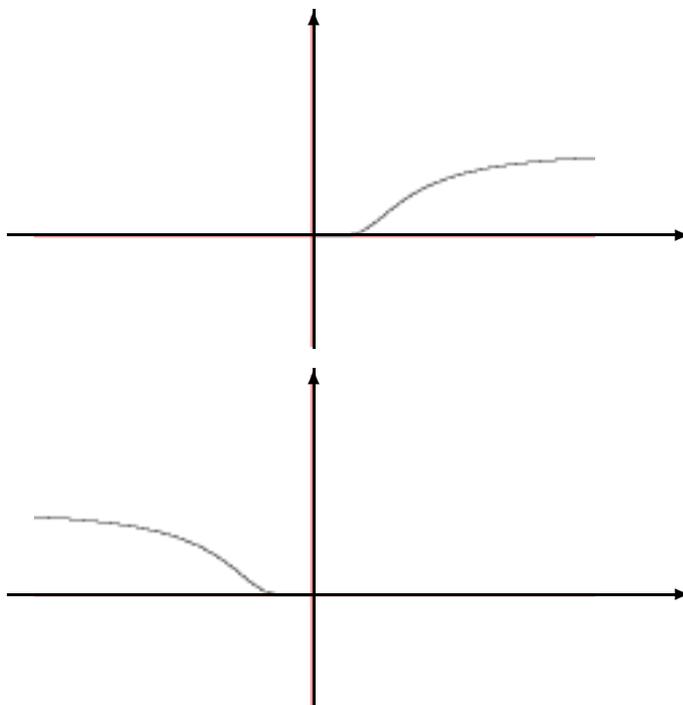
Lasciamo al lettore la facile verifica che  $\psi$  risulta di classe  $C^\infty$  in quanto  $\psi^{(n)}(0) = 0$  per ogni  $n$ . Il grafico di  $\psi$  è naturalmente:



Consideriamo ora le due funzioni ausiliarie  $\psi_\pm : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1)$  definite da

$$\psi_+(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \quad \psi_-(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2} & t < 0 \\ 0 & t \geq 0. \end{cases}$$

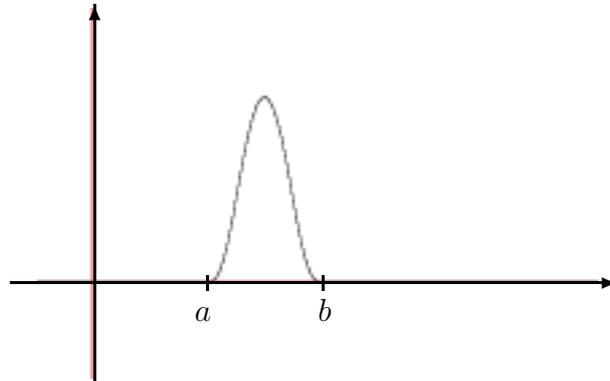
Evidentemente, esse sono entrambe di classe  $C^\infty$  ed hanno grafici rispettivamente



Queste due funzioni vengono poi traslate e moltiplicate, dando luogo ad una tipica funzione a campana. Si scelgano a questo scopo  $a < b$  e si ponga

$$(5.3) \quad \phi_{a,b}(x) = \psi(x-b)\psi_+(x-a).$$

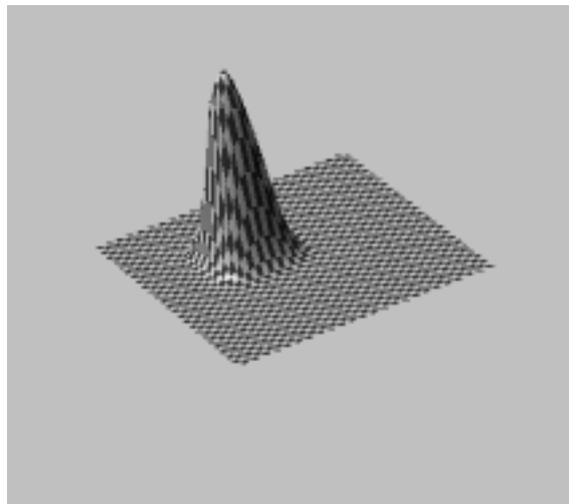
Il grafico che si ottiene è



Per costruire funzioni a campana in più dimensioni si procede semplicemente moltiplicando varie funzioni del tipo precedente. Ad esempio, la funzione

$$\phi_{a,b}(x)\phi_{c,d}(y)$$

definita nel piano sarà positiva nel rettangolo  $[a, b] \times [c, d]$  ed avrà grafico



Mediante le funzioni ora costruite, si può dimostrare il seguente classico risultato, noto come il Lemma di Urysohn (versione  $C^\infty$ ).

**Teorema 5.2.** *Siano  $K \subset \mathbb{R}^n$  un compatto e  $U \subset \mathbb{R}^n$  un aperto tali che  $K \subset U$ . Allora esiste  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  di classe  $C^\infty$  tale che  $f|_K \equiv 1$  e  $\text{supp}(f) \subset U$ .*

**Esercizi.**

1. Provare che la funzione  $\psi$  definita in (5.2) è indefinitamente differenziabile nell'origine e  $\psi^{(n)}(0) = 0$  per ogni  $n$ .

2. Si consideri la funzione definita in (5.3), e la si denoti  $\psi$  in luogo di  $\phi_{a,b}$  per semplicità. Si ponga:

$$\ell(t) = \frac{\int_a^t \psi(x) dx}{\int_a^b \psi(x) dx}.$$

Si provi che  $\ell$  è monotona non decrescente, che essa è nulla per  $t \leq a$  e vale 1 per  $t \geq b$ . Infine, se ne disegni il grafico.

3. Dimostrare il Lemma di Urysohn 5.2.

**5.2. Definizione di distribuzione.** Siamo finalmente pronti per definire il concetto di distribuzione.

**Definizione 5.3.** Una distribuzione è una mappa  $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$  che soddisfa le due seguenti proprietà:

- (i)  $T(\alpha\phi + \beta\psi) = \alpha T(\phi) + \beta T(\psi)$  per ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  e per ogni  $\phi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , ossia  $T$  è lineare.;
- (ii) se  $(\phi_n)_{n \geq 0}$  è una successione di elementi di  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  che converge a  $\phi$  in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , allora  $T(\phi_n) \rightarrow T(\phi)$  in  $\mathbb{C}$ , ossia  $T$  è continua.

In altre parole, una distribuzione è un funzionale lineare continuo su  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Lo spazio di tutte le distribuzioni si denota  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , o più semplicemente  $\mathcal{D}'$ .

Proviamo subito che ogni funzione **localmente integrabile** definisce una distribuzione. Una funzione misurabile  $f$  definita in  $\mathbb{R}^n$  si dice localmente integrabile se per ogni insieme compatto  $K$  risulta  $\int_K |f| < +\infty$ . Lo spazio vettoriale di tutte le funzioni localmente integrabili (modulo uguaglianza quasi ovunque) si denota  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ .

**Esempio 5.4.**

Sia  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  e consideriamo il funzionale  $T_f : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$  definito al solito da

$$T_f(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x) dx.$$

Ovviamente esso è ben definito in quanto se  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  il supporto di  $\phi$  è compatto e quindi, se  $M = \max_{x \in \mathbb{R}^n} |\phi(x)|$  (certo esistente), si ha

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x) dx \right| = \left| \int_{\text{supp}(\phi)} f(x)\phi(x) dx \right| \leq \int_{\text{supp}(\phi)} M |f(x)| dx < +\infty.$$

Proviamo ora la continuità. Sia  $\phi_n \rightarrow \phi$  in  $\mathcal{D}$ , e sia  $K$  il compatto che ne contiene tutti i supporti. Fissiamo  $\varepsilon > 0$ . Siccome  $\phi_n \rightarrow \phi$ , in corrispondenza del multi-indice  $\alpha = (0, \dots, 0)$  abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \phi_n(x) - \partial^\alpha \phi(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} |\phi_n(x) - \phi(x)| = 0,$$

cosicché sicuramente per  $n$  sufficientemente grande risulta

$$\sup_{x \in K} |\phi_n(x) - \phi(x)| < \frac{\epsilon}{\int_K |f|}.$$

Ma allora per  $n$  sufficientemente grande

$$\begin{aligned} |T_f(\phi_n - \phi)| &= \left| \int_K f(x) (\phi_n(x) - \phi(x)) dx \right| \\ &\leq \int_K |f(x)| |\phi_n(x) - \phi(x)| dx \\ &\leq \int_K |f(x)| \sup_{x \in K} |\phi_n(x) - \phi(x)| dx \\ &< \int_K |f(x)| \left( \frac{\epsilon}{\int_K |f|} \right) dx = \epsilon, \end{aligned}$$

il che prova che  $T_f(\phi_n - \phi) \rightarrow 0$  ossia che  $T_f(\phi_n) \rightarrow T_f(\phi)$ . La linearità di  $T_f$  è del tutto ovvia. Abbiamo per scrupolo incluso tutti i dettagli della verifica che le funzioni in  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  sono distribuzioni. Nel seguito lasceremo per lo più al lettore questo tipo di verifica. Facciamo notare che  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  include moltissime delle funzioni che si considerano in pratica, anche se non tutte. Ad esempio, la funzione  $f(x) = 1/x$  non è in  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ . Infine, se modifichiamo  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  sui punti di un insieme di misura nulla, la distribuzione associata non cambia. Ciò è coerente col fatto che gli elementi di  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  sono identificati se coincidono a meno di insiemi di misura nulla.

### Esempio 5.5.

Consideriamo ora la delta di Dirac. A questo scopo, sia  $x \in \mathbb{R}^n$  un punto fissato, e definiamo per ogni  $\phi \in \mathcal{D}$

$$\delta_x(\phi) = \phi(x).$$

La linearità di  $\delta_x$  è ovvia. Se poi  $\phi_n \rightarrow \phi$  in  $\mathcal{D}$ , allora in particolare  $\phi_n \rightarrow \phi$  puntualmente, e quindi  $\phi_n(x) \rightarrow \phi(x)$  in  $\mathbb{C}$ , ossia  $\delta_x(\phi_n) \rightarrow \delta_x(\phi)$ . Quindi  $\delta_x$  è una distribuzione. Il caso di più comune utilizzo è quello in cui  $x = 0$ ; in tal caso, scriveremo per semplicità  $\delta$  in luogo di  $\delta_0$ .

D'ora in avanti, dato un sottoinsieme compatto  $K \subset \mathbb{R}^n$ , denoteremo con  $\mathcal{D}_K$  lo spazio di tutte le funzioni  $\phi \in \mathcal{D}$  il cui supporto è contenuto in  $K$ . Inoltre, porremo

$$(5.4) \quad \|\phi\|_{\alpha, K} := \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \phi(x)|.$$

Vale la pena notare che  $(\phi_n)_{n \geq 0}$  converge a  $\phi$  in  $\mathcal{D}$  se e solo se  $\phi_n, \phi \in \mathcal{D}_K$  per qualche sottoinsieme compatto  $K$  di  $\mathbb{R}^n$ , ed inoltre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\phi_n - \phi\|_{\alpha, K} = 0$$

per ogni multi-indice  $\alpha$ .

Diamo ora una caratterizzazione della continuità dei funzionali lineari su  $\mathcal{D}$  che può essere di maggiore maneggevolezza in diverse circostanze.

**Proposizione 5.6.** *Sia  $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$  una mappa lineare. Sono fatti equivalenti:*

- (i)  $T$  è una distribuzione;
- (ii) per ogni compatto  $K \subset \mathbb{R}^n$  esistono una costante positiva  $C$  ed un intero  $n \geq 0$  tali che

$$(5.5) \quad |T(\phi)| \leq C \sup_{|\alpha| \leq n} \|\phi\|_{\alpha, K}$$

per ogni  $\phi \in \mathcal{D}_K$ ;

- (iii) per ogni compatto  $K \subset \mathbb{R}^n$  esistono una costante positiva  $C$  ed un intero  $n \geq 0$  tali che

$$(5.6) \quad |T(\phi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq n} \|\phi\|_{\alpha, K}$$

per ogni  $\phi \in \mathcal{D}_K$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo l'equivalenza di (i) e (ii). L'equivalenza di (ii) e (iii) è facile ed è lasciata per esercizio.

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Se vale (ii) e se  $\phi_n \rightarrow \phi$  in  $\mathcal{D}_K$ , allora in particolare

$$|T(\phi_n - \phi)| \leq C \sup_{|\alpha| \leq n} \|\phi_n - \phi\|_{\alpha, K}$$

e poiché il membro destro tende a zero per ipotesi, anche  $T(\phi_n) \rightarrow T(\phi)$ .

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Sia  $T$  una distribuzione e sia  $K \subset \mathbb{R}^n$  un compatto. Per ogni intero non negativo  $n$  sia

$$A_n = \sup \left\{ |T(\psi)| : \psi \in \mathcal{D}_K, \sup_{|\alpha| \leq n} \|\psi\|_{\alpha, K} \leq 1 \right\}.$$

Supponiamo di provare che  $A_n < +\infty$  per qualche  $n$ . Allora se  $\phi \in \mathcal{D}_K$  è diversa da zero si ha che  $\psi = \phi / (\sup_{|\alpha| \leq n} \|\phi\|_{\alpha, K})$  soddisfa  $\sup_{|\alpha| \leq n} \|\psi\|_{\alpha, K} \leq 1$  e quindi

$$\begin{aligned} |T(\psi)| \leq A_n &\iff |T\left(\frac{\phi}{\sup_{|\alpha| \leq n} \|\phi\|_{\alpha, K}}\right)| \leq A_n \\ &\implies |T(\phi)| \leq A_n \sup_{|\alpha| \leq n} \|\phi\|_{\alpha, K}, \end{aligned}$$

che è proprio (5.5). Quindi non resta che provare che effettivamente esiste  $n$  tale che  $A_n < +\infty$ . Supponiamo per assurdo che ciò sia falso. Allora per ogni  $n$  esiste  $\phi_n \in \mathcal{D}_K$  tale che

$$\sup_{|\alpha| \leq n} \|\phi_n\|_{\alpha, K} \leq 1, \quad |T(\phi_n)| \geq n.$$

Sia allora  $\psi_n = \phi_n/n$ ; essa è ancora un elemento di  $\mathcal{D}_K$  per il quale

$$\sup_{|\alpha| \leq n} \|\psi_n\|_{\alpha, K} \leq 1/n.$$

Quindi, se  $j \leq n$  si ha

$$\sup_{|\alpha| \leq j} \|\psi_n\|_{\alpha, K} \leq \sup_{|\alpha| \leq n} \|\psi_n\|_{\alpha, K} \leq 1/n,$$

cosicché

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\psi_n\|_{\alpha, K} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{|\alpha| \leq j} \|\psi_n\|_{\alpha, K} = 0.$$

Questo prova che  $\psi_n \rightarrow 0$  in  $\mathcal{D}$ . Siccome  $T$  è una distribuzione per ipotesi, si ha  $T\psi_n \rightarrow 0$ . Abbiamo perciò una contraddizione in quanto

$$|T\psi_n| = \frac{|T\phi_n|}{n} \geq \frac{n}{n} = 1.$$

□

### Esempio 5.7.

Utilizziamo la proposizione appena vista per provare che il funzionale lineare

$$(5.7) \quad \phi \mapsto \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \phi(x) \frac{dx}{x}$$

definisce una distribuzione. Come si vede, la definizione in (5.7) è un sostituto di (5.1) per la funzione  $x \mapsto 1/x$  (per  $0 < |x| \leq 1$ ) che *non* è localmente integrabile. Si osservi che siccome essa è dispari in  $\varepsilon < |x| \leq 1$ , per ogni  $\varepsilon > 0$  si avrà che

$$\int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \frac{dx}{x} = 0.$$

Sia ora  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Lo sviluppo di McLaurin al prim'ordine di  $\phi$  fornisce

$$\left| \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} \right| = |\phi'(\xi)| \leq \sup_{x \in [0,1]} |\phi'(x)|,$$

cosicché

$$\begin{aligned} \left| \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \phi(x) \frac{dx}{x} \right| &= \left| \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} (\phi(x) - \phi(0)) \frac{dx}{x} \right| \\ &\leq \sup_{x \in [0,1]} |\phi'(x)| \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} dx \\ &\leq 2 \sup_{x \in [0,1]} |\phi'(x)|. \end{aligned}$$

Questo mostra innanzitutto che il limite (5.7) esiste e definisce un funzionale lineare. Inoltre, dato un qualunque compatto  $K$  di  $\mathbb{R}$  la stima precedente mostra che, indicato con  $T$  il funzionale in esame ed utilizzando la notazione introdotta in (5.4), si ha

$$|T(\phi)| = \left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \phi(x) \frac{dx}{x} \right| \leq 2 \sup_{x \in [0,1] \cap K} |\phi'(x)| \leq 2 \|\phi\|_{1, K} \leq 2 \sup_{j=0,1} \|\phi\|_{j, K}.$$

Pertanto, in virtù della Proposizione 5.6,  $T$  è una distribuzione. Solitamente il limite (5.7) definisce il cosiddetto integrale *valor principale*, che si scrive

$$PV \int_{-1}^1 \phi(x) \frac{dx}{x}.$$

Così come abbiamo munito lo spazio  $\mathbb{C}_c^\infty$  di una topologia (ossia di una nozione di convergenza) per poter poi definire l'opportuna nozione di continuità per i funzionali lineari, muniamo ora  $\mathcal{D}'$  di una topologia.

**Definizione 5.8.** Diremo che la successione di distribuzioni  $(T_n)_{n \geq 0}$ ,  $T_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , converge a  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  se per ogni  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  risulta  $T_n(\phi) \rightarrow T(\phi)$  in  $\mathbb{C}$ .

Naturalmente si può dare senso anche a limiti del tipo  $T_t \rightarrow T$  se  $\{T_t\}$  è una famiglia di distribuzioni dove  $t$  è un parametro reale. Ad esempio:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} T_t = T \text{ in } \mathcal{D}' \iff \lim_{t \rightarrow 0^+} T_t(\phi) = T(\phi) \text{ per ogni } \phi \in \mathcal{D}.$$

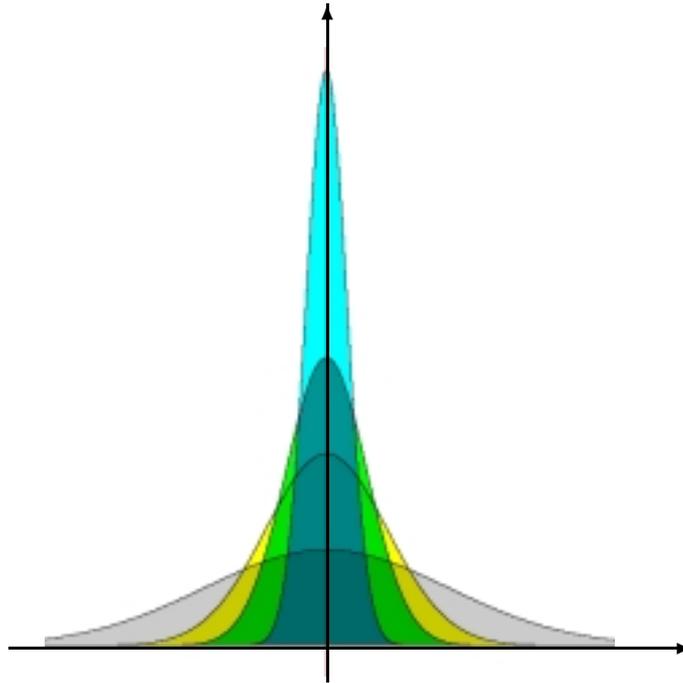
Una convenzione. In virtù dell'Esempio 5.4, sappiamo che ogni funzione  $f \in L^1_{\text{loc}}$  individua una distribuzione  $T_f$  definita mediante (5.1). Alle volte scriveremo semplicemente  $f$  in luogo di  $T_f$ , ossia  $f(\phi) = \int f(x)\phi(x) dx$ .

**Proposizione 5.9.** Sia  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  e sia  $\int f = 1$ . Sia  $f_t$  come in (4.2). Allora  $f_t \rightarrow \delta$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  per  $t \rightarrow 0$ .

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\phi \in \mathcal{D}$ . Poniamo  $\check{\phi}(x) = \phi(-x)$ . Per il Teorema 4.3, si ha

$$f_t(\phi) = \int f_t(x)\phi(x) dx = \int f_t(x)\check{\phi}(0-x) dx = (f_t * \check{\phi})(0) \rightarrow \check{\phi}(0) = \phi(0) = \delta(\phi).$$

□



### Esercizi.

4. Provare che la funzione  $f(x) = 1/x$  non è in  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ .
5. Provare l'equivalenza (ii)  $\iff$  (iii) della Proposizione 5.6.

**5.3. Operazioni sulle distribuzioni.** Una delle *raisons d'être* delle distribuzioni è che ad esse si possono applicare le operazioni dell'analisi restando all'interno della classe delle distribuzioni. Ad esempio, data una distribuzione qualsiasi in  $\mathcal{D}'$  esiste sempre un'altra distribuzione in  $\mathcal{D}'$  che ne è la derivata. Come vedremo, se inoltre  $f \in C^1$  allora  $(T_f)' = T_{f'}$ . Le definizioni che daremo in questa sezione sono tutte fondate sul medesimo concetto di trasposizione: in parole povere, si tratta di “scaricare” l'operazione sulla funzione test su cui la distribuzione opera, sfruttando l'estrema regolarità degli elementi in  $\mathcal{D}$ .

**5.3.1. Derivazione.** Sia  $f$  una funzione di classe  $C^1$  in  $\mathbb{R}$ . Quindi  $f'$  è una funzione continua e in particolare è localmente integrabile; essa definisce pertanto una distribuzione. Utilizzando integrazione per parti ed il fatto cruciale che le funzioni test hanno supporto compatto (cosicché sicuramente  $\phi(x) = 0$  per  $|x|$  grande), si ha:

$$\begin{aligned} f'(\phi) &= \int f'(x)\phi(x) dx \\ &= f(x)\phi(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int f(x)\phi'(x) dx \\ &= - \int f(x)\phi'(x) dx \\ &= -f(\phi'). \end{aligned}$$

Questo argomento può essere ripetuto  $k$  volte se  $f$  è di classe  $C^k$ . Inoltre, se siamo in  $\mathbb{R}^n$  con  $n > 1$  la procedura può essere svolta in diverse direzioni e fornisce l'uguaglianza

$$\partial^\alpha f(\phi) = (-1)^{|\alpha|} f(\partial^\alpha \phi).$$

per ogni  $f \in C^{|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$  e per ogni  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Guardiamo bene questa semplice relazione. Il membro destro ha senso anche se  $f$  non è derivabile, e può quindi essere utilizzata per *definire* il membro sinistro. In altri termini, se  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  si pone

$$(5.8) \quad \partial^\alpha T(\phi) := (-1)^{|\alpha|} T(\partial^\alpha \phi), \quad \text{per ogni } \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Quindi, come osservato all'inizio di questa sezione, vale la formula  $\partial^\alpha(T_f) = T_{\partial^\alpha f}$  ogniqualvolta  $f$  è di classe  $C^{|\alpha|}$ .

Si osservi che dalla Proposizione 5.6 segue che se  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  e se  $K$  è un compatto di  $\mathbb{R}$ , allora esistono  $C$  ed  $m$  tali che

$$|T'(\phi)| = |-T(\phi')| \leq C \sup_{j \leq m} \left\| \frac{d^j}{dx^j} \phi' \right\|_{j,K} \leq C \sup_{j \leq m} \left\| \frac{d^{j+1}}{dx^{j+1}} \phi \right\|_{j,K} \leq C \sup_{k \leq m+1} \left\| \frac{d^k}{dx^k} \phi \right\|_{j,K}$$

per ogni  $\phi \in \mathcal{D}(R)$ . Quindi  $T'$  è una distribuzione<sup>11</sup>. Analoghi discorsi valgono per ogni  $\alpha$  e per ogni  $n$  nel caso generale della definizione (5.8) (cfr. l'Esercizio 6).

### Esempio 5.10.

Calcoliamo le derivate della delta di Dirac:

$$\partial^\alpha \delta(\phi) = (-1)^{|\alpha|} \delta(\partial^\alpha \phi) = (-1)^{|\alpha|} (\partial^\alpha \phi)(0).$$

Per  $n = 1$  si ha perciò  $\delta'(\phi) = -\phi'(0)$ ,  $\delta''(\phi) = \phi''(0)$ ,  $\delta'''(\phi) = -\phi'''(0)$ , e così via.

<sup>11</sup>Ricordiamo *en passant* che se  $n = 1$ , allora  $\partial^\alpha$  sarà piuttosto  $d^j/dx^j$  con  $j \geq 0$  intero.

**Esempio 5.11.**

Consideriamo il **gradino di Heaviside**, ossia la funzione  $H$  definita da

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Per definizione, se  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  si ha

$$H'(\phi) = -H(\phi') = - \int H(t)\phi'(t) dt = - \int_0^{+\infty} \phi'(t) dt = -\phi(t) \Big|_0^{+\infty} = \phi(0).$$

Quindi  $H' = \delta$ . Questo esempio si può generalizzare al caso di funzioni lisce a tratti (cfr. l'Esercizio 7).

5.3.2. *Moltiplicazione per funzioni lisce.* Se  $f$  è localmente integrabile e  $\psi$  è una funzione di classe  $C^\infty$  si ha

$$(\psi T_f)(\phi) = \int (\psi(x)f(x))\phi(x) dx = \int f(x)(\psi(x)\phi(x)) dx = T_f(\psi\phi).$$

Definiamo quindi per ogni  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  ed ogni  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  il prodotto di  $\psi$  e di  $T$  mediante la formula

$$(5.9) \quad (\psi T)(\phi) = T(\psi\phi) \quad \text{per ogni } \phi \in \mathcal{D}(R^n).$$

È molto facile verificare che  $\psi T \in \mathcal{D}'$  (cfr. l'Esercizio 8).

5.3.3. *Traslazione e dilatazione.* Per  $y \in \mathbb{R}^n$  fissato, sia al solito  $\tau_y$  l'operatore di traslazione sulle funzioni:  $\tau_y f(x) = f(x - y)$ . Se  $f \in L^1_{loc}$  si avrà per ogni  $\phi \in \mathcal{D}$

$$\int \tau_y f(x)\phi(x) dx = \int f(x - y)\phi(x) dx = \int f(z)\phi(z + y) dz = \int f(z)\tau_{-y}\phi(z) dz,$$

il che naturalmente suggerisce di definire per ogni  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  ed ogni  $y \in \mathbb{R}^n$  la traslata  $\tau_y T$  di  $T$  mediante la formula

$$(5.10) \quad (\tau_y T)(\phi) = T(\tau_{-y}\phi) \quad \text{per ogni } \phi \in \mathcal{D}(R^n).$$

Siano ora  $a > 0$ ,  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  e sia  $f_a(x) = a^{-n}f(x/a)$  come in (4.2). Per ogni  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  risulterà

$$\int f_a(x)\phi(x) dx = \int a^{-n}f\left(\frac{x}{a}\right)\phi(x) dx = a^{-n} \int f(z)\phi(az) a^n dz = \int f(z)\phi(az) dz$$

e poiché evidentemente  $\phi(az) = a^{-n}\phi_{a^{-1}}(z)$ , per ogni  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  si porrà:

$$(5.11) \quad T_a(\phi) = T(a^{-n}\phi_{a^{-1}}) \quad \text{per ogni } \phi \in \mathcal{D}(R^n).$$

La verifica che (5.10) e (5.11) definiscono effettivamente delle distribuzioni è lasciata per esercizio (cfr. l'Esercizio 9).

5.3.4. *Composizione con mappe lineari.* Sia  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una trasformazione lineare invertibile. Se  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ , allora la composizione  $f \circ A : x \mapsto f(Ax)$  soddisfa

$$\int f \circ A(x) \phi(x) dx = \int f(Ax) \phi(x) dx = \int f(z) \phi(A^{-1}x) |\det A^{-1}| dz$$

per ogni  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Quindi per ogni  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  poniamo

$$(5.12) \quad T \circ A(\phi) = T(|\det A^{-1}| \phi \circ A^{-1}) \quad \text{per ogni } \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Al solito, affidiamo al lettore la verifica che (5.12) definisce una distribuzione (cfr. l'Esercizio 9).

5.3.5. *Convoluzioni.* Siano  $f \in L^1_{loc}$  e  $\psi \in \mathcal{D}$ . Per la commutatività della convoluzione

$$f * \psi(x) = \psi * f(x) = \int f(y) \psi(x - y) dy = \int f(y) \check{\psi}(y - x) dy = \int f(y) (\tau_x \check{\psi})(y) dy$$

ove si è posto, al solito

$$\check{\psi}(x) = \psi(-x).$$

Si osservi che tutti gli integrali precedenti convergono perché il supporto della funzione  $y \mapsto \psi(x - y) = (\tau_x \check{\psi})(y)$  è evidentemente compatto; più esattamente

$$\text{supp}(\tau_x \check{\psi}) = \{y : \mathbb{R}^n : x - y = z \text{ con } z \in \text{supp}(\psi)\} = x - \text{supp}(\psi).$$

Quindi, per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$  si ha  $\tau_x \check{\psi} \in \mathcal{D}$  e si può pertanto formare il numero complesso  $T(\tau_x \check{\psi})$ . Per ogni  $T \in \mathcal{D}'$  ed ogni  $\psi \in \mathcal{D}$ , la convoluzione di  $T$  e  $\psi$  è la funzione

$$(5.13) \quad T * \psi(x) = T(\tau_x \check{\psi}).$$

Si osservi che se  $\phi \in \mathcal{D}$ , allora  $\tau_x \phi \rightarrow \tau_{x_0} \phi$  in  $\mathcal{D}$  se  $x \rightarrow x_0$  in  $\mathbb{R}^n$  (cfr. la dimostrazione della Proposizione 5.12 e l'Esercizio 10). Quindi se  $T$  è una distribuzione si ha  $T(\tau_x \check{\psi}) \rightarrow T(\tau_{x_0} \check{\psi})$ , cosicché  $T * \psi$  è una funzione continua. Come vedremo nella Proposizione 5.12, la convoluzione è in realtà di classe  $C^\infty$ . Prima però, un paio di osservazioni. Innanzitutto, se  $T = \delta$  allora dalla (5.13) si ha subito

$$\delta * \psi(x) = \delta(\tau_x \check{\psi}) = \tau_x \check{\psi}(0) = \check{\psi}(0 - x) = \psi(x),$$

e quindi **la delta di Dirac è l'identità per la convoluzione**. In secondo luogo, osserviamo che avremmo potuto seguire una strada leggermente diversa per definire la convoluzione  $T * \psi$ , sempre a partire dal caso  $T = T_f$  con  $f \in L^1_{loc}$ . In effetti, per ogni funzione test  $\phi$ , in virtù del Teorema di Tonelli-Fubini si ha

$$\begin{aligned} \int (f * \psi)(y) \phi(y) dy &= \int \int f(z) \psi(y - z) dz \phi(y) dy \\ &= \int \int \check{\psi}(z - y) \phi(y) dy f(z) dz \\ &= \int (\check{\psi} * \phi)(z) f(z) dz. \end{aligned}$$

Quindi siamo portati a definire

$$(5.14) \quad T * \psi(\phi) = T(\phi * \check{\psi}) \quad \text{per ogni } \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Si può dimostrare che le due definizioni sono equivalenti, ossia che vale (5.14) se il membro sinistro è interpretato come la distribuzione associata alla funzione  $T * \psi$  che è definita mediante (5.13) e di cui ora proviamo le proprietà.

**Proposizione 5.12.** *Siano  $T \in \mathcal{D}'$  e  $\psi \in \mathcal{D}$ , e si ponga  $T * \psi(x) = T(\tau_x \check{\psi})$ . Allora*

- (i)  $T * \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ;
- (ii)  $\partial^\alpha(T * \psi) = \partial^\alpha T * \psi = T * (\partial^\alpha \psi)$  per ogni multi-indice  $\alpha$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Si fissino  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $w \in \mathbb{R}^n$ . Siccome  $\psi \in \mathcal{D}$ , esisterà  $r$  tale che  $\text{supp}(\psi) \subset B(0, r)$ . Perciò se  $\|x\| \leq C$  e  $\|w\| < 1$ , la funzione

$$y \mapsto \tau_{x+w} \check{\psi}(y) = \psi(x + w - y)$$

è di classe  $C^\infty$  e ha supporto in  $B(0, R)$  con  $R = r + C + 1$ . Inoltre la funzione

$$y \mapsto \tau_{x+w} \check{\psi}(y) - \tau_x \check{\psi}(y) = \psi(x + w - y) - \psi(x - y)$$

è anch'essa di classe  $C^\infty$  e supportata in  $B(0, R)$ , e quindi uniformemente continua<sup>12</sup> al pari di tutte le sue derivate. Quindi converge uniformemente a zero assieme alle sue derivate per  $w \rightarrow 0$  in  $\mathbb{R}^n$ . Ciò significa  $\tau_{x+w} \check{\psi} \rightarrow \tau_x \check{\psi}$  in  $\mathcal{D}$ . Siccome  $T \in \mathcal{D}'$ , si ha  $T(\tau_{x+w} \check{\psi}) \rightarrow T(\tau_x \check{\psi})$ , ossia  $T * \psi(x + w) \rightarrow T * \psi(x)$ . Abbiamo provato la continuità di  $T * \psi$ .

Sia ora  $e_1, \dots, e_n$  la base standard di  $\mathbb{R}^n$ . Lo stesso argomento visto sopra mostra che per  $|h| < 1$  e per ogni  $j = 1, \dots, n$  la funzione

$$y \mapsto \frac{\tau_{x+he_j} \check{\psi}(y) - \tau_x \check{\psi}(y)}{h} - \tau_x \partial_j \check{\psi}(y) = \frac{\psi(x + he_j - y) - \psi(x - y)}{h} - \partial_j \psi(x - y)$$

è in  $\mathcal{D}$  e converge uniformemente a zero insieme a tutte le sue derivate per  $h \rightarrow 0$ . Quindi, siccome  $T \in \mathcal{D}'$ ,

$$\frac{T * \psi(x + he_j) - T * \psi(x)}{h} = \frac{T(\tau_{x+he_j} \check{\psi}) - T(\tau_x \check{\psi})}{h} \rightarrow T(\tau_x \partial_j \check{\psi}) = T * (\partial_j \psi)(x),$$

il che dimostra  $\partial_j(T * \psi) = T * (\partial_j \psi)$ . Induttivamente, risulta  $\partial^\alpha(T * \psi) = T * (\partial^\alpha \psi)$ , e quindi  $T * \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Perciò (i) è dimostrato. Ora, per ogni funzione test

$$\partial^\alpha(\tau_x \phi) = \tau_x(\partial^\alpha \phi), \quad \partial^\alpha \check{\phi} = (-1)^{|\alpha|} (\partial^\alpha \phi)^\vee,$$

da cui segue

$$\begin{aligned} (\partial^\alpha T) * \psi(x) &= (\partial^\alpha T)(\tau_x \check{\psi}) \\ &= T \left( (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha (\tau_x \check{\psi}) \right) \\ &= (-1)^{|\alpha|} T \left( \tau_x (\partial^\alpha \check{\psi}) \right) \\ &= T(\tau_x (\partial^\alpha \psi)^\vee) \\ &= T * (\partial^\alpha \psi)(x) \end{aligned}$$

ossia la (ii). □

<sup>12</sup>Ricordiamo che una funzione  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  si dice uniformemente continua se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che  $\sup_{\|x-y\| < \delta} |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ . Una funzione continua su un compatto è automaticamente uniformemente continua. Si veda ad esempio [R1].

Ricordiamo che assumiamo nota l'eguaglianza (5.14).

**Corollario 5.13.** *Sia  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  con  $\int \psi = 1$  e sia al solito  $\psi_t(x) = t^{-n}\psi(x/t)$ . Allora, per ogni  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  si ha  $T * \psi_t \rightarrow T$  in  $\mathcal{D}'$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Applichiamo ancora una volta il Teorema 4.3. Per ogni funzione test  $\phi$  si ha

$$\check{\psi}_t * \phi \rightarrow \phi \quad \partial^\alpha(\check{\psi}_t * \phi) = \check{\psi}_t * (\partial^\alpha \phi) \rightarrow \partial^\alpha \phi$$

uniformemente, al tendere di  $t$  a zero. Inoltre, tutti i supporti coinvolti sono contenuti in uno stesso insieme compatto e quindi  $\check{\psi}_t * \phi \rightarrow \phi$  in  $\mathcal{D}$ . Ma allora, da (5.14)

$$(T * \psi_t)(\phi) = T(\check{\psi}_t * \phi) \rightarrow T(\phi),$$

come volevasi. □

Il corollario precedente mostra che una distribuzione può essere approssimata mediante funzioni molto regolari. L'approssimazione è, come si sul dire, nel senso debole, cioè quello chiarito dalla definizione 5.8.

### Esercizi.

**6.** Far vedere che (5.8) definisce un elemento di  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  per ogni  $\alpha$  e per ogni  $n$ .

**7.** Sia  $f$  definita su  $\mathbb{R}$ , di classe  $C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$  e tale che esistano finiti i limiti destro  $f^+(0)$  e sinistro  $f^-(0)$  nell'origine. Provare che se  $f'$  denota la derivata ordinaria di  $f$  allora si ha

$$(T_f)' = (f^+(0) - f^-(0))\delta + T_{f'} \quad \text{in } \mathcal{D}'.$$

Si generalizzi questa formula ad una arbitrario elemento  $f \in PS(\mathbb{R})$  che, come noto, può avere infinite discontinuità.

**8.** Provare che (5.9) definisce un elemento di  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  per ogni  $\psi$  e per ogni  $T$ .

**9.** Provare che (5.10) e (5.11) definiscono effettivamente delle distribuzioni. Provare che anche (5.12) definisce una distribuzione e che inoltre (5.11) è un caso particolare di (5.12).

**10.** Completare l'argomento visto nella dimostrazione della Proposizione 5.12 per provare che se  $\phi \in \mathcal{D}$ , allora  $\tau_x \phi \rightarrow \tau_{x_0} \phi$  in  $\mathcal{D}$  se  $x \rightarrow x_0$  in  $\mathbb{R}^n$ . Si utilizzi l'uniforme continuità delle funzioni continue a supporto compatto.

**11.** Si provi che per ogni funzione test  $\partial^\alpha(\tau_x \phi) = \tau_x(\partial^\alpha \phi)$  e  $\partial^\alpha \check{\phi} = (-1)^{|\alpha|}(\partial^\alpha \phi)^\sim$ .

**5.4. Lo spazio di Schwartz.** Uno degli strumenti più potenti dell'analisi è senz'altro la trasformata di Fourier. Nel tentativo di estenderla alle distribuzioni, si è tentati di procedere come al solito, usando la formula di moltiplicazione, ossia la Proposizione 4.11. In estrema sintesi, essa asserisce che

$$\int \hat{f}\phi = \int f\hat{\phi}$$

e si sarebbe quindi tentati di porre  $\hat{T}(\phi) = T(\hat{\phi})$  per una distribuzione  $T$ . Il problema è che se  $\phi$  è una funzione test, allora  $\hat{\phi}$  non è una funzione test, a meno che non sia

$\phi \equiv 0$ . La dimostrazione di questo fatto non è difficile (si veda [F3], pag. 293). Un modo per aggirare questo problema fu inventato da L. Schwartz, e consiste nell'ampliare la classe delle funzioni test ad una classe  $\mathcal{S}$  che sia stabile rispetto alla trasformata di Fourier, ossia tale che se  $f \in \mathcal{S}$  allora anche  $\hat{f} \in \mathcal{S}$ . Definendo poi opportunamente una topologia in  $\mathcal{S}$  si potranno considerare i funzionali lineari continui su  $\mathcal{S}$ , che risulteranno quindi una classe più piccola di  $\mathcal{D}'$ . Per tali distribuzioni (le distribuzioni temperate) risulterà pertanto definita la trasformata di Fourier.

In termini semplici, una funzione nella classe di Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  è una funzione  $\phi$  tale che  $\phi$  e tutte le sue derivate tendono a zero all'infinito più rapidamente di ogni potenza negativa di  $\|x\|$ . Per esprimere questa idea con precisione introduciamo le cosiddette **seminorme**<sup>13</sup> di Schwartz  $\rho_{\alpha,\beta}$ . Se  $\alpha$  e  $\beta$  sono multi-indici e se  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , poniamo

$$(5.15) \quad \rho_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha (\partial^\beta f)(x)|.$$

Naturalmente, è facile trovare  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  tale che  $\rho_{\alpha,\beta}(f) = +\infty$  per qualche  $\alpha$  e  $\beta$ .

**Definizione 5.14.** *Una funzione  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  si dice una funzione di Schwartz se per ogni coppia di multi-indici  $\alpha$  e  $\beta$  risulta*

$$\rho_{\alpha,\beta}(f) < +\infty.$$

Lo spazio di tutte le funzioni di Schwartz si denota  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Gli elementi di  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  si dicono funzioni di Schwartz oppure funzioni a decrescenza rapida.

Evidentemente  $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ . Un esempio di funzione che sta in  $\mathcal{S} \setminus \mathcal{D}$  è  $e^{-\|x\|^2}$ , oppure  $P(x)e^{-\|x\|^2}$  dove  $P$  è un polinomio. Esistono vari modi per esprimere la decrescenza più che polinomiale delle funzioni di Schwartz. La dimostrazione del lemma seguente si trova in [F3], Proposizione 8.3.

**Lemma 5.15.** *Sia  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Sono fatti equivalenti*

- (i)  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
- (ii) per ogni coppia di multi-indici  $\alpha$  e  $\beta$  risulta

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\beta (x^\alpha f)(x)| < +\infty;$$

- (iii) per ogni multi-indice  $\alpha$  e per ogni intero non negativo  $N$  risulta

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + \|x\|)^N |\partial^\alpha f(x)| < +\infty.$$

Si noti che la (iii) del lemma precedente implica in particolare che  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ , in quanto per  $N$  sufficientemente elevato la funzione  $x \mapsto (1 + \|x\|)^N$  è in  $L^p(\mathbb{R}^n)$ . Inoltre, da (iii) segue anche che se  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  e  $\gamma$  è un multi-indice, allora  $\partial^\gamma f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Da (ii) segue il fatto (peraltro piuttosto ovvio) che se  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  e  $\gamma$  è un multi-indice, allora  $x^\gamma f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , e quindi se  $P$  è un polinomio  $Pf \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . È infine del tutto ovvio che  $f \in \mathcal{S}$  se e solo se  $\hat{f} \in \mathcal{S}$ .

**Teorema 5.16.** *La trasformata di Fourier manda  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  bigettivamente su  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .*

<sup>13</sup>La nozione di seminorma si riferisce al fatto che le proprietà (2) e (3) di una norma (viste all'inizio della Sezione 3.3) sono verificate, ma non la (1). Si veda a questo proposito l'Esercizio 14.

**DIMOSTRAZIONE.** Per quanto appena detto, se  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  e  $\alpha$  e  $\beta$  sono multi-indici, allora  $x^\alpha(\partial^\beta f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  e in particolare  $x^\alpha(\partial^\beta f) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Per il Teorema 4.5 si ha:

$$\mathcal{F}\left(x^\alpha(\partial^\beta f)\right)(\xi) = i^{|\alpha|+|\beta|}\partial^\alpha(\xi^\beta \mathcal{F}f)(\xi).$$

Ne segue che

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left| \partial^\alpha(\xi^\beta \mathcal{F}f)(\xi) \right| = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left| \mathcal{F}\left(x^\alpha(\partial^\beta f)\right)(\xi) \right| \leq \|x^\alpha(\partial^\beta f)\|_1 < +\infty$$

per ogni  $\alpha$  e  $\beta$ . Questo prova che  $\rho_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}f) < +\infty$  per ogni  $\alpha$  e  $\beta$  e che perciò  $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Dalla formula di inversione si ha infine che se  $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , allora  $\mathcal{F}\mathcal{F}f = f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  e quindi  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .  $\square$

Dal risultato precedente segue anche che la convoluzione tra funzioni di Schwartz è una funzione di Schwartz (cfr. l'Esercizio 16).

Come nel caso delle funzioni test, introduciamo una nozione di convergenza per le funzioni a decrescenza rapida.

**Definizione 5.17.** Una successione  $(\phi_n)_{n \geq 0}$  di elementi di  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  converge in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  alla funzione  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  se e solo se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{\alpha,\beta}(\phi_n - \phi) = 0$$

per ogni coppia di multi-indici  $\alpha$  e  $\beta$ .

Come sappiamo, le funzioni di  $\mathcal{S}$  sono anche in  $L^p$ . Si può dimostrare che se  $\phi_n \rightarrow \phi$  in  $\mathcal{S}$ , allora  $\phi_n \rightarrow \phi$  in  $L^p$  per ogni  $p$ . Una dimostrazione di questo fatto si trova ad esempio in [Gra]. È facile vedere inoltre che se  $\phi_n \rightarrow \phi$  in  $\mathcal{D}$ , allora  $\phi_n \rightarrow \phi$  in  $\mathcal{S}$  (cfr. l'Esercizio 17).

### Esercizi.

**12.** Trovare  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  tale che  $\rho_{\alpha,\beta}(f) = +\infty$  per qualche  $\alpha$  e  $\beta$ .

**13.** Provare che per ogni polinomio  $P$  (incluso  $P \equiv 1$ ) la funzione  $P(x)e^{-\|x\|^2}$  è nello spazio di Schwartz  $\mathcal{S}$  e non è in  $\mathcal{D}$ .

**14.** Provare che le seminorme di Schwartz soddisfano:

- (2)  $\rho_{\alpha,\beta}(\lambda\phi) = |\lambda|\rho_{\alpha,\beta}(\phi)$ ;
- (3)  $\rho_{\alpha,\beta}(\phi + \psi) \leq \rho_{\alpha,\beta}(\phi) + \rho_{\alpha,\beta}(\psi)$

ma che  $\rho_{\alpha,\beta}(\phi) = 0$  non implica necessariamente  $\phi = 0$ .

**15.** Provare che per  $N > n/p$  la funzione  $x \mapsto (1 + \|x\|)^N$  è in  $L^p(\mathbb{R}^n)$ .

**16.** Provare che se  $f, g \in \mathcal{S}$  allora  $f * g \in \mathcal{S}$ .

**17.** Provare che se  $\phi_n \rightarrow \phi$  in  $\mathcal{D}$ , allora  $\phi_n \rightarrow \phi$  in  $\mathcal{S}$ .

**5.5. Distribuzioni temperate e trasformata di Fourier.** La classe di distribuzioni che introduciamo ora è definita partire da  $\mathcal{S}$ , così come  $\mathcal{D}'$  è definita a partire da  $\mathcal{D}$ .

**Definizione 5.18.** Una distribuzione temperata è una mappa  $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$  che soddisfa le due seguenti proprietà:

- (i)  $T(\alpha\phi + \beta\psi) = \alpha T(\phi) + \beta T(\psi)$  per ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  e per ogni  $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , ossia  $T$  è lineare.;
- (ii) se  $(\phi_n)_{n \geq 0}$  è una successione di elementi di  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  che converge a  $\phi$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , allora  $T(\phi_n) \rightarrow T(\phi)$  in  $\mathbb{C}$ , ossia  $T$  è continua.

In altre parole, una distribuzione temperata è un funzionale lineare continuo su  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Lo spazio di tutte le distribuzioni temperate si denota  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , o più semplicemente  $\mathcal{S}'$ .

Osserviamo innanzitutto che una distribuzione temperata è una distribuzione, ossia che in effetti  $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$ . Infatti, se  $T \in \mathcal{S}'$  allora  $T$  è lineare sulle funzioni a decrescenza rapida e quindi in particolare sulle funzioni test. Inoltre, come visto nell'Esercizio 17, se  $\phi_n \rightarrow \phi$  in  $\mathcal{D}$ , allora  $\phi_n \rightarrow \phi$  in  $\mathcal{S}$  e quindi  $T(\phi_n) \rightarrow T(\phi)$  in  $\mathbb{C}$ , ossia  $T \in \mathcal{D}'$ . L'inclusione è propria: ad esempio la funzione  $e^{\|x\|^2}$  definisce una distribuzione che non è temperata.

La continuità di un funzionale lineare su  $\mathcal{S}$  può essere testata mediante controlli sulle seminorme. La dimostrazione della proposizione che segue è del tutto analoga a quella della Proposizione 5.6, ed è lasciata per esercizio.

**Proposizione 5.19.** Sia  $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$  una mappa lineare. Sono fatti equivalenti:

- (i)  $T$  è una distribuzione temperata;
- (ii) esistono una costante positiva  $C$  ed interi  $n, m \geq 0$  tali che

$$|T(\phi)| \leq C \sup_{|\alpha| \leq n, |\beta| \leq m} \rho_{\alpha, \beta}(\phi)$$

per ogni  $\phi \in \mathcal{S}$ ;

- (iii) esistono una costante positiva  $C$  ed interi  $n, m \geq 0$  tali che

$$|T(\phi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq n, |\beta| \leq m} \rho_{\alpha, \beta}(\phi)$$

per ogni  $\phi \in \mathcal{S}$ .

La tecnica generale utilizzata nella Sezione 5.3 per trasferire le operazioni dell'analisi sulle distribuzioni può essere ripetuta per le distribuzioni temperate. Derivate, traslazioni e composizione con mappe lineari mandano  $\mathcal{S}'$  in  $\mathcal{S}'$  (cfr. l'Esercizio 20). Lo stesso non può dirsi per l'operazione di moltiplicazione per funzioni  $C^\infty$ . Affinché  $\psi T \in \mathcal{S}'$  se  $T \in \mathcal{S}'$  bisogna che  $\psi$  sia a **crescita lenta**. Ciò significa che per ogni multi-indice  $\alpha$  devono esistere una costante positiva  $C$  ed un intero  $N$  tali che

$$|\partial^\alpha \psi| \leq C(1 + \|x\|)^N.$$

Evidentemente, i polinomi sono a crescita lenta. Per quanto riguarda le convoluzioni, possiamo definire come nella sezione precedente

$$T * \psi(x) = T(\tau_x \check{\psi})$$

ogniquale volta  $\psi \in \mathcal{S}$  e  $T \in \mathcal{S}'$ . Leggermente più complicata dell'analogo in  $\mathcal{D}'$  è la dimostrazione del fatto che segue, per il quale rimandiamo il lettore a [F3], pag. 294.

**Proposizione 5.20.** *Se  $\psi \in \mathcal{S}$  e  $T \in \mathcal{S}'$  allora  $T * \psi$  è una funzione  $C^\infty$  a crescita lenta, ed inoltre per ogni  $\phi \in \mathcal{S}$  risulta  $T * \psi(\phi) = T(\phi * \check{\psi})$ .*

Infine, possiamo definire la trasformata di Fourier in  $\mathcal{S}'$ . Se  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$$(5.16) \quad (\mathcal{F}T)(\phi) = T(\mathcal{F}\phi) \quad \text{per ogni } \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Osserviamo che la delta di Dirac  $\delta$  è una distribuzione temperata. In effetti

$$\delta(\phi) = \phi(0) \leq \rho_{0,0}(\phi).$$

Ma allora possiamo considerare  $\mathcal{F}\delta$ :

$$\mathcal{F}\delta(\phi) = \delta(\mathcal{F}\phi) = \mathcal{F}\phi(0) = \int \phi(x) dx = T_1(\phi).$$

In poche parole,  $\hat{\delta} = 1$ , ossia la trasformata di Fourier di  $\delta$  è la (distribuzione associata alla) funzione identicamente uguale a 1.

Tutte le principali proprietà della trasformata di Fourier viste nella Sezione 4.3 continuano a valere nel contesto delle distribuzioni temperate, se opportunamente interpretate. Le riassumiamo nella proposizione che segue, la cui dimostrazione è lasciata per esercizio.

**Proposizione 5.21.** *Valgono le seguenti proprietà*

- (i) *Per ogni  $a \in \mathbb{R}^n$  e  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  si ha  $\mathcal{F}(\tau_a T) = e^{-ia\xi} \mathcal{F}T$ , e  $\mathcal{F}(e^{ia(\cdot)} T) = \tau_a \mathcal{F}T$ .*
- (ii) *Se  $A \in GL(n, \mathbb{R})$  e  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  si ha  $\mathcal{F}(T \circ A) = |\det A|^{-1} (\mathcal{F}T \circ {}^t A^{-1})$ .*
- (iii) *Se  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , allora per ogni multi-indice  $\alpha$  si ha  $\mathcal{F}(\partial^\alpha T) = (i\xi)^\alpha (\mathcal{F}T)$  e  $\partial^\alpha (\mathcal{F}T) = \mathcal{F}[(-i(\cdot))^\alpha T]$ .*
- (iv) *Se  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  e  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  si ha  $\mathcal{F}(T * \psi) = (\mathcal{F}T)(\mathcal{F}\psi)$ .*

### Esercizi.

- 18. Provare che la funzione  $e^{\|x\|^2}$  definisce una distribuzione che non è temperata.
- 19. Dimostrare la Proposizione 5.19.
- 20. Provare che derivate, traslazioni e composizione con mappe lineari invertibili mandano  $\mathcal{S}'$  in  $\mathcal{S}'$ .
- 21. Provare che se  $\psi$  è a crescita lenta e  $T \in \mathcal{S}'$ , allora  $\psi T \in \mathcal{S}'$ .
- 22. Provare la Proposizione 5.21.

## 6. ANALISI IN TEMPO-FREQUENZA E WAVELETS

Questo capitolo è una rilettura del Capitolo IV di [M], cui rimandiamo per approfondimenti.

L'esempio più tipico cui ci si riferisce nel parlare di analisi in tempo-frequenza è quello della musica. Nell'ascoltare un brano musicale, si percepiscono frequenze diverse in istanti diversi. Un compositore si serve del pentagramma per rappresentare in modo efficiente i valori delle frequenze al variare del tempo. Una nota è la più piccola parte di musica, nel senso che è indivisibile: possiamo pensarla come un "atomo". L'idea dell'analisi in tempo-frequenza è quella di decomporre un segnale in funzioni elementari che rappresentino pacchetti di frequenze vicine, ossia funzioni ben localizzate *sia* in tempo, *sia* in frequenza, per quanto possibile. Come vedremo, vi sono limitazioni naturali alla localizzazione simultanea in tempo e frequenza, espresse dal celebrato principio di indeterminazione di Heisenberg.



Una precisazione è d'obbligo: la terminologia tempo-frequenza è naturalmente ispirata ai modelli fisici in cui le funzioni descrivono quantità dipendenti dal tempo, ossia  $t \mapsto f(t)$  con  $t \in \mathbb{R}$ . La maggior parte di quanto verrà discusso in questo capitolo verrà formulato in  $\mathbb{R}^d$  con  $d$  qualunque. Se  $d > 1$ , lo spazio  $\mathbb{R}^{2d}$  viene denominato nella letteratura di Fisica **spazio delle fasi**.

**6.1. Atomi in tempo-frequenza.** Una funzione ben localizzata in tempo e in frequenza si chiama un atomo in tempo-frequenza, anche se questo concetto non è preciso dal punto di vista matematico. In generale, considereremo famiglie di atomi  $\{\psi_g : g \in G\}$  indicizzate in un qualche insieme  $G$  di parametri<sup>14</sup>. Supponiamo per il momento che per ogni  $g \in G$  si abbia  $\psi_g \in L^2(\mathbb{R})$  e  $\|\psi_g\|_2 = 1$ . Siamo interessati alla trasformata  $T_\psi$  definita dall'operatore lineare che ad ogni  $f \in L^2(\mathbb{R})$  associa il numero

<sup>14</sup>Di particolare rilevanza in *Analisi Armonica* e nelle sue applicazioni è il caso in cui  $G$  è un gruppo, ovvero un suo sottoinsieme discreto.

complesso

$$T_\psi f(g) = \int f(t) \overline{\psi_g(t)} dt = \langle f, \psi_g \rangle.$$

La formula di Parseval mostra che

$$T_\psi f(g) = \int f(t) \overline{\psi_g(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\xi) \overline{\hat{\psi}_g(\xi)} d\xi,$$

evidenziando una proprietà di localizzazione che è utile tenere a mente: se  $\psi_g$  è nulla al di fuori di un piccolo intervallo, allora  $T_\psi f$  terrà conto solo dei valori di  $f$  in tale intervallo temporale e, similmente, se  $\hat{\psi}_g$  è nulla al di fuori di un piccolo intervallo, allora  $T_\psi f$  terrà conto solo dei valori di  $\hat{f}$  in tale intervallo di frequenze.

### Esempio 6.1.

I più tipici e studiati esempi di atomi in tempo-frequenza sono associati alle cosiddette analisi **a finestra mobile** (o **short time**) e analisi in **ondine**. Un atomo in tempo-frequenza di quelli considerati nella teoria (continua) delle ondine, si ottiene a partire da una “ondina madre”  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  mediante una dilatazione di  $a > 0$  e una traslazione di  $b \in \mathbb{R}$ :

$$(6.1) \quad \psi_g(t) = \psi_{(a,b)}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

In questo esempio, l'insieme dei parametri  $G$  è il prodotto cartesiano

$$G = \{(a, b) : a > 0, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}.$$

È importante notare che se si definisce su  $G$  la moltiplicazione

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa', ab' + b)$$

allora  $G$  diviene un gruppo, noto come il **gruppo affine** della retta o brevemente “ $ax + b$ ”. In effetti, l'elemento neutro è  $(1, 0)$  e l'inverso di  $(a, b)$  è  $(1/a, -b/a)$ . La ragione per cui la struttura di gruppo svolge un ruolo rilevante è perché se per ogni  $(a, b) \in G$  consideriamo l'operatore

$$\pi(a, b) : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}), \quad \pi(a, b)\psi = \psi_{(a,b)},$$

allora risulta

$$(6.2) \quad \pi(a, b) \circ \pi(a', b') = \pi((a, b) \cdot (a', b')),$$

come il lettore è invitato a verificare. In altre parole, la struttura del gruppo dei parametri riflette il modo in cui si compongono gli operatori da essi ottenuti.

Gli atomi considerati nella teoria della trasformata di Fourier a finestra mobile si costruiscono a partire da una “finestra”  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  mediante traslazione  $x \in \mathbb{R}$  e modulazione  $\xi \in \mathbb{R}$ , ossia

$$(6.3) \quad \psi_g(t) = \psi_{(x,\xi)}(t) = e^{i\xi t} \psi(t - x).$$

In questo caso, l'insieme dei parametri  $G$  è il piano  $\mathbb{R}^2$ . Se su  $\mathbb{R}^2$  si definisce la struttura naturale additiva  $(x, \xi) \cdot (y, \eta) = (x + y, \xi + \eta)$ , per la famiglia di operatori  $\psi \mapsto \rho(x, \xi)\psi(t) = \psi_{(x, \xi)}(t)$  non vale l'analogo di (6.2):

$$\begin{aligned} \rho(x, \xi) \circ \rho(y, \eta)\psi(t) &= \rho(x, \xi) [\rho(y, \eta)\psi](t) \\ &= e^{i\xi t} [\rho(y, \eta)\psi](t - x) \\ &= e^{i\xi t} e^{i\eta(t-x)} \psi(t - x - y) \\ &= e^{-i\eta x} \rho(x + y, \xi + \eta)\psi(t). \end{aligned}$$

Per fare in modo che  $\rho(x, \xi) \circ \rho(y, \eta) = \rho(x + y, \xi + \eta)$ , bisogna considerare un gruppo più grande di  $\mathbb{R}^2$ , il famoso **gruppo di Heisenberg**, e usare quest'ultimo come gruppo di parametri. Una discussione dettagliata di questi aspetti elude tuttavia gli scopi di questi appunti.

L'informazione fornita dal prodotto scalare  $\langle f, \psi_g \rangle$  viene rappresentata nel **piano tempo-frequenza** mediante una regione rettangolare, per descrivere la quale ricordiamo i concetti di **media** e di **varianza**. Se  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , allora

$$\mu(f) = \frac{1}{\|f\|_2^2} \left( \int_{\mathbb{R}} x |f(x)|^2 dx \right),$$

è la media di  $f$  rispetto alla distribuzione di probabilità normalizzata ottenuta da  $|f(x)|^2 dx$ , e la sua varianza è definita da

$$\sigma(f) = \frac{1}{\|f\|_2} \left( \int_{\mathbb{R}} (x - \mu(f))^2 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

L'intervallo  $[\mu(f) - \sigma(f), \mu(f) + \sigma(f)]$  dà una indicazione qualitativa dell'insieme sul quale  $f$  assume "la maggior parte" dei suoi valori. È opportuno citare a questo punto il famoso principio di indeterminazione cui abbiamo già fatto riferimento. Una dimostrazione si può trovare ad esempio in [M] oppure in [Gro].

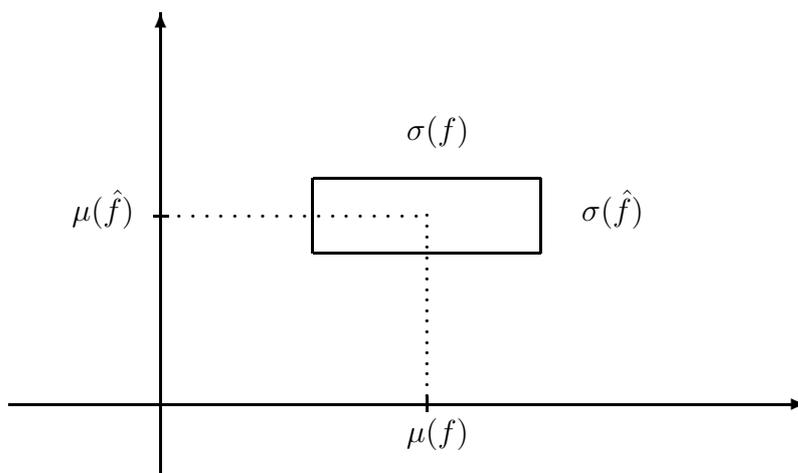
**Teorema 6.2** (Principio di indeterminazione di Heisenberg). *Per ogni  $f \in L^2(\mathbb{R})$  si ha*

$$\sigma(f)\sigma(\hat{f}) \geq \frac{1}{2}.$$

*L'eguaglianza vale se e solo se esistono due numeri reali  $\tau$  e  $\xi$  e due numeri complessi  $a$  e  $b$  tali che*

$$f(t) = ae^{i\xi t} e^{-b(t-\tau)^2}.$$

Torniamo alla discussione sugli atomi in tempo-frequenza. Si assuma che gli atomi siano normalizzati, ossia  $\|\psi_g\|_2 = 1$ . L'atomo  $\psi_g$  è rappresentato dal rettangolo centrato nel punto  $(\mu(\psi_g), \mu(\hat{\psi}_g))$  nel piano  $\mathbb{R}^2 = \{(t, \xi)\}$  di ampiezza  $\sigma(\psi_g)$  nella direzione dei tempi e  $\sigma(\hat{\psi}_g)$  nella direzione delle frequenze. Tale rettangolo prende alle volte il nome di **rettangolo di Heisenberg**.



Rappresentazione grafica di un atomo in tempo-frequenza.

Il principio di indeterminazione afferma pertanto che l'area del rettangolo di Heisenberg è sempre maggiore o uguale a  $1/2$ . Esso fornisce pertanto una prima e decisiva indicazione del fatto che il piano tempo-frequenza va riguardato con estrema attenzione, nel senso che non esiste una funzione che sia perfettamente localizzata in alcuno dei suoi punti.

**6.2. Trasformata di Fourier a finestra mobile.** Atomi del tipo (6.3) furono introdotti da Gabor nel 1946 per misurare frequenze ben localizzate nei segnali sonori. La trasformata di Fourier a finestra mobile, a volte detta trasformata di Fourier in “tempo breve” (in inglese *short-time Fourier transform*, spesso abbreviata in STFT) è la trasformata di Fourier di una funzione  $f$  che sia stata preventivamente localizzata in un certo intervallo temporale, da pensarsi breve. In altre parole, la funzione viene prima moltiplicata per una “finestra”  $\psi$ , idealmente la funzione caratteristica di un intervallo, e poi trasformata. Per evitare di introdurre discontinuità in modo artificiale, la finestra viene normalmente scelta liscia.

**Definizione 6.3.** Sia  $\psi \neq 0$  una funzione fissata (detta *finestra*) definita in  $\mathbb{R}^d$ . La trasformata di Fourier a finestra mobile di una funzione,  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ , rispetto a  $\psi$  è definita da

$$(6.4) \quad S_\psi f(x, \xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \overline{\psi(y-x)} e^{-i\xi \cdot y} dy, \quad x, \xi \in \mathbb{R}^d$$

Il suo modulo al quadrato

$$(6.5) \quad \text{Spec}_\psi f(x, \xi) = |S_\psi f(x, \xi)|^2$$

viene detto lo spettrogramma di  $f$  rispetto a  $\psi$ .

Per poter descrivere con linguaggio proprio le proprietà della trasformata di Fourier a finestra mobile, d'ora in poi abbreviata in STFT, è utile introdurre le notazioni

tipiche dell'analisi in tempo-frequenza. Le due operazioni fondamentali di questo settore dell'analisi di Fourier sono certamente le **traslazioni** e le **modulazioni**. Con lieve modifica di quanto visto Sezione 4.3, ove avevamo adottato le notazioni più comuni nella comunità matematica, scriviamo

$$T_x f(t) = f(t - x), \quad x, t \in \mathbb{R}^d$$

e

$$M_\omega f(\xi) = e^{i\omega \cdot \xi} f(\xi), \quad \xi, \omega \in \mathbb{R}^d.$$

Abbiamo allora le **relazioni canoniche di commutazione**

$$(6.6) \quad T_x M_\omega = e^{-ix \cdot \omega} M_\omega T_x,$$

che sono di semplicissima dimostrazione. In particolare ne segue che  $T_x$  e  $M_\omega$  commutano se e solo se  $x \cdot \omega \in 2\pi\mathbb{Z}$ . Inoltre valgono le formule

$$(6.7) \quad (T_x f)^\wedge = M_{-x} \hat{f}, \quad (M_\omega f)^\wedge = T_\omega \hat{f},$$

che altro non sono che una riscrittura di (i) del Teorema 4.5. Da quanto precede discende la più importante formula in analisi tempo-frequenza:

$$(6.8) \quad (T_x M_\omega f)^\wedge = e^{-ix \cdot \omega} T_\omega M_{-x} \hat{f},$$

che si dimostra in modo immediato a partire da (6.6), (6.7) e (6.8).

**Proposizione 6.4.** *Se  $f, \psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , allora  $S_\psi f$  è uniformemente continua in  $\mathbb{R}^{2d}$  e valgono le formule*

$$(6.9) \quad S_\psi f(x, \xi) = \mathcal{F}(f \cdot T_x \overline{\psi})(\xi)$$

$$(6.10) \quad = \langle f, M_\xi T_x \psi \rangle$$

$$(6.11) \quad = (2\pi)^{-d} \langle \hat{f}, T_\xi M_{-x} \hat{\psi} \rangle$$

$$(6.12) \quad = (2\pi)^{-d} e^{-ix \cdot \xi} S_{\hat{\psi}} \hat{f}(\xi, -x).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Le formule (6.9), (6.10), (6.11) e (6.12) sono una conseguenza diretta della discussione precedente e della definizione (6.4), e vengono lasciate per esercizio. La continuità uniforme discende invece dalla continuità delle traslazioni in  $L^2$ , vista nell'Esercizio 12 della Sezione 3.3, ossia:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \|T_x f - f\|_2 = 0$$

e

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \|M_\xi f - f\|_2 = (2\pi)^{-d/2} \lim_{\xi \rightarrow 0} \|T_\xi \hat{f} - \hat{f}\|_2 = 0,$$

quest'ultima dovuta al Teorema di Plancherel.  $\square$

Da quanto visto in (6.10) abbiamo quindi ritrovato la forma generale  $T_\psi f(g) = \langle f, \psi_g \rangle$  discussa all'inizio del capitolo; in effetti, ricordando la (6.3) abbiamo

$$(6.13) \quad S_\psi f(x, \xi) = \langle f, M_\xi T_x \psi \rangle = \langle f, \psi_{(x, \xi)} \rangle$$

con  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2d}$ . La formula (6.12), ossia

$$S_\psi f(x, \xi) = (2\pi)^{-d} e^{-ix \cdot \xi} S_{\hat{\psi}} \hat{f}(\xi, -x)$$

è da alcuni considerata la formula fondamentale dell'analisi in tempo-frequenza: essa mostra che se riguardiamo  $S_\psi f$  come una rappresentazione in tempo-frequenza di  $f$ , allora la trasformata di Fourier corrisponde ad una trasformazione di  $\pi/2$  nel piano.

Dal punto di vista degli spazi funzionali in cui la STFT è definita, si osservi che se  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , allora il prodotto  $f \cdot T_x \bar{\psi}$  sta in  $L^1(\mathbb{R}^d)$  e di conseguenza  $S_\psi f = \mathcal{F}(f \cdot T_x \bar{\psi})$  è ben definita puntualmente. Similmente, se  $\psi \in L^p(\mathbb{R}^d)$  e  $f \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$  con  $p$  e  $p'$  esponenti coniugati, allora per Hölder abbiamo la stessa conclusione. La relazione (6.10) consente di estendere la STFT al contesto delle distribuzioni temperate. Il riferimento d'obbligo è [Gro].

**Proposizione 6.5.** *Ogniqualvolta  $S_\psi f$  è definita, si ha:*

$$(6.14) \quad S_\psi(T_y M_\omega f)(x, \xi) = e^{-iy \cdot \xi} S_\psi f(x - y, \xi - \omega)$$

per  $x, y, \xi, \omega \in \mathbb{R}^d$ . In particolare

$$|S_\psi(T_y M_\omega f)(x, \xi)| = |S_\psi f(x - y, \xi - \omega)|.$$

DIMOSTRAZIONE. Utilizziamo la relazione di commutazione

$$M_{-\omega} T_{-y} M_\xi T_x = M_{-\omega} (e^{iy \cdot \xi} M_\xi T_{-y}) T_x = e^{iy \cdot \xi} M_{\xi - \omega} T_{x - y},$$

ottenendo

$$\begin{aligned} S_\psi(T_y M_\omega f)(x, \xi) &= \langle T_y M_\omega f, M_\xi T_x \psi \rangle \\ &= \langle f, M_{-\omega} T_{-y} M_\xi T_x \psi \rangle \\ &= \langle f, e^{iy \cdot \xi} M_{\xi - \omega} T_{x - y} \psi \rangle \\ &= e^{-iy \cdot \omega} S_\psi f(x - y, \xi - \omega). \end{aligned}$$

□

La STFT soddisfa proprietà simili a quelle godute dalla trasformata di Fourier. La prima che enunciamo ha a che fare con i prodotti scalari.

**Teorema 6.6** (Relazioni di ortogonalità per la STFT). *Siano  $f_1, f_2, \psi_1, \psi_2 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ . Allora  $S_{\psi_j} f_j \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$  e*

$$\langle S_{\psi_1} f_1, S_{\psi_2} f_2 \rangle = (2\pi)^d \langle f_1, f_2 \rangle \overline{\langle \psi_1, \psi_2 \rangle}.$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo le finestre  $\psi_j \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ , cosicché  $f_j \cdot T_x \bar{\psi}_j \in L^2(\mathbb{R}^d)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}^d$ . Possiamo allora applicare (6.9) e poi Parseval all'integrale in  $d\xi$  e otteniamo

$$\begin{aligned} &\int \left( \int S_{\psi_1} f_1(x, \xi) \overline{S_{\psi_2} f_2(x, \xi)} d\xi \right) dx \\ &= \int \left( \int \mathcal{F}(f_1 \cdot T_x \bar{\psi}_1)(\xi) \overline{\mathcal{F}(f_2 \cdot T_x \bar{\psi}_2)(\xi)} d\xi \right) dx \\ &= (2\pi)^d \int \left( \int f_1(t) \overline{f_2(t)} \overline{\psi_1(t - x)} \psi_2(t - x) dt \right) dx. \end{aligned}$$

Siccome  $f_1 \overline{f_2} \in L^1(\mathbb{R}^d, dt)$  e  $\psi_1 \overline{\psi_2} \in L^1(\mathbb{R}^d, dx)$ , possiamo applicare Fubini e continuare come segue:

$$\begin{aligned} \langle S_{\psi_1} f_1, S_{\psi_2} f_2 \rangle &= (2\pi)^d \int f_1(t) \overline{f_2(t)} \left( \int \overline{\psi_1(t-x)} \psi_2(t-x) dx \right) dt \\ &= (2\pi)^d \langle f_1, f_2 \rangle \overline{\langle \psi_1, \psi_2 \rangle}. \end{aligned}$$

L'estensione a  $f_1, f_2, \psi_1, \psi_2 \in L^2(\mathbb{R}^d)$  dell'uguaglianza trovata avviene mediante un argomento di densità standard, che omettiamo. Il lettore interessato può vedere [Gro] per i dettagli.  $\square$

**Corollario 6.7.** *Se  $f, \psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , allora*

$$\|S_{\psi} f\|_2 = (2\pi)^{d/2} \|f\|_2 \|\psi\|_2.$$

*In particolare, se  $\|\psi\|_2 = 1$ , allora*

$$(6.15) \quad \|S_{\psi} f\|_2 = (2\pi)^{d/2} \|f\|_2 \quad \text{per ogni } f \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

*ed in questo caso la STFT è multiplo di una isometria di  $L^2(\mathbb{R}^d)$  in  $L^2(\mathbb{R}^d)$ .*

Osserviamo che dalla (6.15) segue in particolare, utilizzando la (6.10), che se per ogni  $x, \xi \in \mathbb{R}^d$  risulta  $0 = S_{\psi} f(x, \xi) = \langle f, M_{\xi} T_x \psi \rangle$ , allora  $f = 0$  quasi ovunque. Ciò equivale a dire che per ogni fissata  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$  l'insieme  $\{M_{\xi} T_x \psi : x, \xi \in \mathbb{R}^d\}$  genera un sottospazio denso di  $L^2(\mathbb{R}^d)$ .

**Teorema 6.8** (Inversione della STFT). *Siano  $\psi, \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$  tali che  $\langle \psi, \varphi \rangle \neq 0$ . Allora per ogni  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$  si ha*

$$(6.16) \quad f = \frac{1}{(2\pi)^d \langle \varphi, \psi \rangle} \iint S_{\psi} f(x, \xi) M_{\xi} T_x \varphi dx d\xi,$$

*ove l'uguaglianza vale in senso debole, ossia, per ogni  $h \in L^2(\mathbb{R}^d)$*

$$(6.17) \quad \langle f, h \rangle = \frac{1}{(2\pi)^d \langle \varphi, \psi \rangle} \iint S_{\psi} f(x, \xi) \langle M_{\xi} T_x \varphi, h \rangle dx d\xi.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $h \in L^2(\mathbb{R}^d)$ . Utilizzando le relazioni di ortogonalità abbiamo

$$\begin{aligned} (2\pi)^d \langle f, h \rangle &= \frac{1}{\langle \varphi, \psi \rangle} \langle S_{\psi} f, S_{\varphi} h \rangle \\ &= \frac{1}{\langle \varphi, \psi \rangle} \iint S_{\psi} f(x, \xi) \overline{\langle h, M_{\xi} T_x \varphi \rangle} dx d\xi, \end{aligned}$$

come volevasi.  $\square$

Concludiamo questa sezione con qualche commento circa i rettangoli di Heisenberg associati alla STFT nel caso unidimensionale. Supponiamo di scegliere una finestra  $\psi$  che sia reale e pari, ossia  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\psi(-t) = \psi(t)$ . Sappiamo allora (esercizio 4.3 della Sezione 4.3) che tale è anche  $\hat{\psi}$ . Calcoliamo ora  $\sigma(\psi_{x,\xi})$  e  $\sigma(\widehat{\psi_{x,\xi}})$  nell'ipotesi ulteriore che  $\|\psi\|_2 = 1$ , ricordando che

$$\psi_{x,\xi}(t) = e^{i\xi t} \psi(t-x).$$

Innanzitutto, per la media abbiamo:

$$\mu(\psi_{x,\xi}) = \int t|\psi_{x,\xi}(t)|^2 dt = \int t|\psi(t-x)|^2 dt = \int (x+y)|\psi(y)|^2 dy = x + \int y|\psi(y)|^2 dy,$$

e quindi  $\mu(\psi_{x,\xi}) = x$  in quanto  $y \mapsto y|\psi(y)|^2$  è dispari perché  $\psi$  è pari. Quindi la varianza  $\sigma(\psi_{x,\xi})$  soddisfa

$$\sigma^2(\psi_{x,\xi}) = \int (t - \mu(\psi_{x,\xi}))^2 |\psi_{x,\xi}(t)|^2 dt = \int (t-x)^2 |\psi(t-x)|^2 dt = \int t^2 |\psi(t)|^2 dt$$

ed è pertanto indipendente da  $x$  e  $\xi$ . Siccome

$$\widehat{\psi_{x,\xi}}(\omega) = e^{-ix(\omega-\xi)} \widehat{\psi}(\omega - \xi),$$

otteniamo in modo del tutto analogo  $\mu(\widehat{\psi_{x,\xi}}) = \xi$  e quindi

$$\sigma^2(\widehat{\psi_{x,\xi}}) = \frac{1}{2\pi} \int (\omega - \xi)^2 |\widehat{\psi_{x,\xi}}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int \omega^2 |\widehat{\psi}(\omega)|^2 d\omega = \sigma^2(\widehat{\psi}).$$

Ne segue che a  $\psi_{x,\xi}$  corrisponde un rettangolo di Heisenberg centrato nel punto  $(x, \xi)$  esattamente uguale al rettangolo che corrisponde a  $\psi$ , che è naturalmente centrato nell'origine. Ciò significa che la STFT ha la stessa risoluzione in ogni punto.

**6.3. Trasformata wavelet.** Mentre i parametri dell'analisi in tempo-frequenza sono, ovviamente, il “tempo”  $x$  e la “frequenza”  $\xi$ , i parametri che si utilizzano nell'analisi in ondine (*wavelets*) sono tipicamente il “tempo”  $x$  e la “scala”  $s$ . Anche se dal punto di vista matematico non vi sono problemi significativi nel trattare il caso  $x \in \mathbb{R}^d$  e  $s \in \mathbb{R}$ , noi ci limiteremo al caso naturale in cui il tempo è effettivamente un numero reale, ossia  $x \in \mathbb{R}$ , e le scale sono positive, ossia  $s > 0$ . Il ruolo svolto nell'analisi in tempo-frequenza dalle modulazioni  $M_\xi$  è ora svolto dalle **dilatazioni**

$$(6.18) \quad D_s f(x) = \frac{1}{\sqrt{s}} f\left(\frac{x}{s}\right).$$

Con riferimento al gruppo affine, cioè a (6.1), avremo  $D_s f = f_{(s,0)}$ . Osserviamo che la normalizzazione scelta, ossia la moltiplicazione per  $1/\sqrt{s}$  è diversa da quella utilizzata in (4.2) e poi nel Teorema 4.5. A noi ora interessa una normalizzazione in  $L^2(\mathbb{R})$  e non in  $L^1(\mathbb{R})$ . In effetti, con il cambio di variabile  $y = x/s$  abbiamo

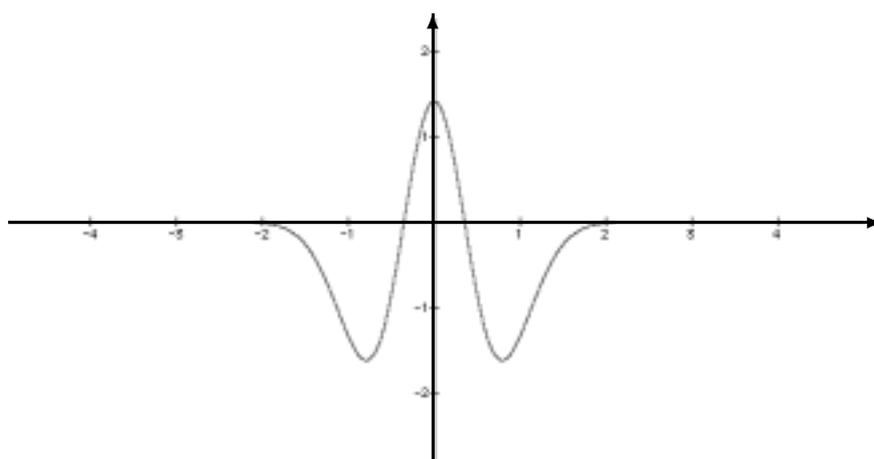
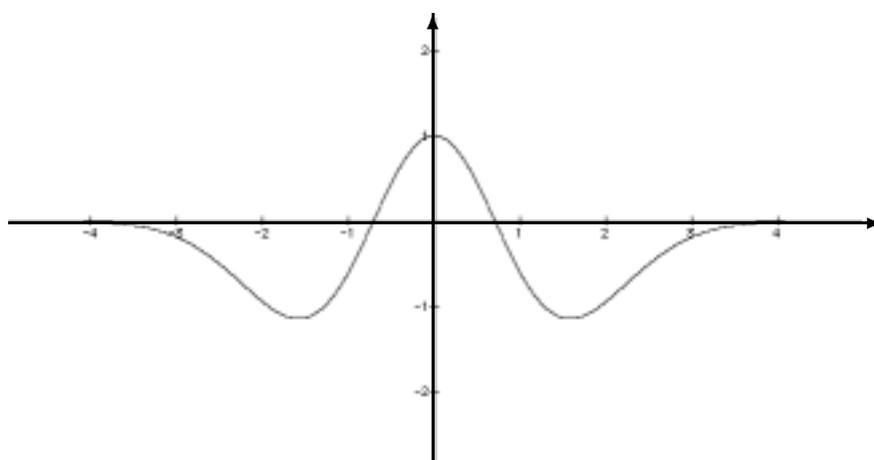
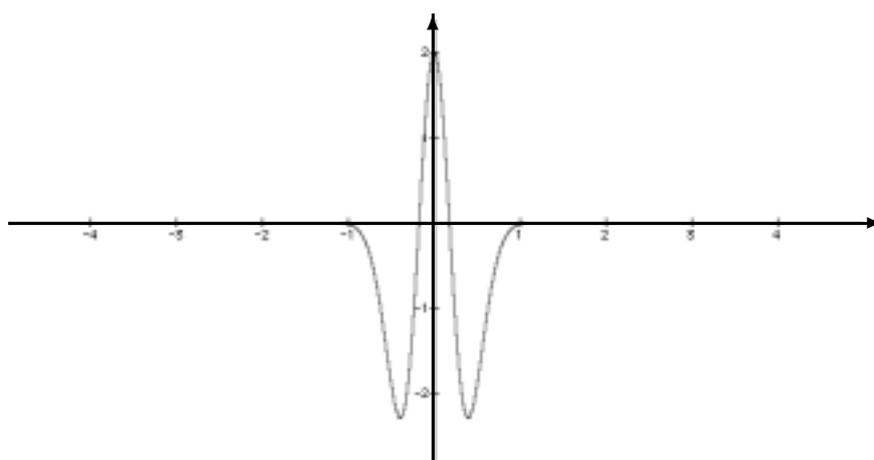
$$\|D_s f\|_2^2 = \int \left| \frac{1}{\sqrt{s}} f\left(\frac{x}{s}\right) \right|^2 dx = \int \left| f\left(\frac{x}{s}\right) \right|^2 \frac{dx}{s} = \int |f(y)|^2 dy = \|f\|_2^2.$$

In analogia formale con la STFT diamo la seguente:

**Definizione 6.9.** Sia  $\psi \neq 0$  una funzione fissata (detta *ondina analizzante*) definita in  $\mathbb{R}$ . La *trasformata wavelet* di una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  rispetto a  $\psi$  è definita da

$$(6.19) \quad W_\psi f(x, s) = \int f(y) \frac{1}{\sqrt{s}} \overline{\psi\left(\frac{y-x}{s}\right)} dy = \langle f, T_x D_s \psi \rangle \quad x \in \mathbb{R}, s > 0.$$

Spesso scriveremo *WT* (*wavelet transform*) per la *trasformata wavelet*.

Ondina analizzante  $\psi$ Ondina dilatata  $D_2\psi$ Ondina compressa  $D_{1/2}\psi$

In molte applicazioni, l'ondina analizzante  $\psi$  è presa di media nulla, ossia  $\int \psi = 0$  e normalizzata in  $L^2$ , ossia in modo che  $\|\psi\|_2 = 1$ . Osserviamo che se il supporto di  $\psi$  è un intervallo  $I$  del tipo  $I = [-\delta, \delta]$ , allora il supporto di  $T_x D_s \psi$  è contenuto nell'insieme  $x + sI$ , che è un intorno del punto  $x$  di semi-ampiezza  $\delta s$ . Quindi  $W_\psi f(x, s)$  codifica in qualche modo informazione su  $f$  localizzata in  $x$  ad una "scala" che dipende da  $s$ , nel senso che  $s$  rappresenta la risoluzione locale alla quale i dettagli vengono osservati. Per un  $s > 0$  fissato, la trasformata wavelet può essere interpretata come una approssimazione di  $f$  che vede solo i dettagli alla scala  $s$  e confonde dettagli più fini. Viceversa, se fissiamo  $x$  e consideriamo  $s \rightarrow 0$ , la funzione  $W_\psi f(x, \cdot)$  si comporta come un microscopio puntato su  $x$  che evidenzia dettagli via via più fini.

Riprendiamo per un attimo il linguaggio del gruppo affine. Con riferimento alla formula (6.3), la trasformata wavelet può essere scritta nella forma  $W_\psi f(x, s) = \langle f, \pi(s, x)\psi \rangle$ , in analogia formale con la formula (6.13) per la STFT. Una notazione unificata per le trasformate STFT e WT è proprio quella suggerita all'inizio del capitolo:  $T_\psi f(g) = \langle f, \psi_g \rangle$ . Nel caso della WT,  $g \in G$  dove  $G$  è il gruppo affine " $ax + b$ " e  $\psi_g = \pi(g)\psi$  con  $\pi$  definita da (6.1). In effetti  $\pi : G \rightarrow \mathcal{U}(L^2)$  è una mappa a valori nello spazio  $\mathcal{U}(L^2)$  degli operatori unitari<sup>15</sup> su  $L^2$ . Una siffatta mappa si chiama una **rappresentazione unitaria** di  $G$  se soddisfa  $\pi(gh) = \pi(g)\pi(h)$  e se è continua in un senso opportuno.

**Teorema 6.10** (Relazioni di ortogonalità per la WT). *Se  $\psi_1, \psi_2 \in L^2(\mathbb{R})$  soddisfano le condizioni di ammissibilità*

$$(6.20) \quad \int_0^{+\infty} |\hat{\psi}_1(\xi)\hat{\psi}_2(\xi)| \frac{d\xi}{\xi} = < +\infty.$$

$$(6.21) \quad \int_0^{+\infty} \overline{\hat{\psi}_1(\xi)}\hat{\psi}_2(\xi) \frac{d\xi}{\xi} = \int_0^{+\infty} \overline{\hat{\psi}_1(-\xi)}\hat{\psi}_2(-\xi) \frac{d\xi}{\xi} := C_{\psi_1, \psi_2},$$

allora per ogni  $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R})$  si ha

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} W_{\psi_1} f_1(x, s) \overline{W_{\psi_2} f_2(x, s)} \frac{dx ds}{s^2} = C_{\psi_1, \psi_2} \langle f_1, f_2 \rangle.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Proveremo le relazioni di ortogonalità per  $f_j \in L^1 \cap L^2$ . Il caso generale segue applicando argomenti di densità. Osserviamo che se poniamo

$$h^*(x) = \overline{h(-x)},$$

allora in generale

$$f * g(x) = \int f(y)g(x - y) dy = \int f(y)\overline{T_x(g^*)(y)} dy = \langle f, T_x(g^*) \rangle.$$

Quindi

$$W_\psi f(x, s) = \langle f, T_x D_s \psi \rangle = (f * D_s \psi^*)(x).$$

---

<sup>15</sup>Non è necessario in questo contesto definire nei dettagli il concetto di operatore unitario  $U$ . In pratica si deve pensare che  $U$  è una mappa lineare  $U : L^2 \rightarrow L^2$  che preserva il prodotto scalare di  $L^2$ , cioè  $\langle Uf, Ug \rangle = \langle f, g \rangle$ .

Questo mostra che per ogni fissato  $s$  la funzione  $x \mapsto W_\psi f(x, s)$  è in  $L^2$ , in quanto  $f \in L^1$ ,  $D_s \psi^* \in L^2$  e, come conseguenza della disuguaglianza integrale di Minkowski,  $L^1 * L^2 \subset L^2$  (si veda l'Esercizio 2 della Sezione 4.2). La trasformata di  $D_s \psi^*$  è

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(D_s \psi^*)(\xi) &= \int \frac{1}{\sqrt{s}} \overline{\psi(-x/s)} e^{-ix\xi} dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{s}} \overline{\psi(y)} e^{isy\xi} s dy \\ &= \sqrt{s} \widehat{\psi}(s\xi). \end{aligned}$$

Applicando Parseval-Plancherel all'integrale in  $dx$  abbiamo

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \left( \int_{\mathbb{R}} W_{\psi_1} f_1(x, s) \overline{W_{\psi_2} f_2(x, s)} dx \right) \frac{ds}{s^2} \\ &= \int_0^{+\infty} (2\pi)^{-1} \left( \int_{\mathbb{R}} s \hat{f}_1(\xi) \overline{\hat{f}_2(\xi)} \widehat{\psi}_1(s\xi) \widehat{\psi}_2(s\xi) d\xi \right) \frac{ds}{s^2} \\ &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_1(\xi) \overline{\hat{f}_2(\xi)} \left( \int_0^{+\infty} \widehat{\psi}_1(s\xi) \widehat{\psi}_2(s\xi) \frac{ds}{s} \right) d\xi \\ &= (2\pi)^{-1} \langle \mathcal{F} f_1, \mathcal{F} f_2 \rangle C_{\psi_1, \psi_2} \\ &= C_{\psi_1, \psi_2} \langle f_1, f_2 \rangle. \end{aligned}$$

In effetti, Fubini è stato applicato perché  $|\hat{f}_1 \hat{f}_2| \in L^1$  e  $s^{-1} \widehat{\psi}_1 \widehat{\psi}_2 \in L^1$  per ipotesi. Per quanto riguarda l'integrale interno in  $ds$ , si scrive  $\xi = \varepsilon|\xi|$  dove  $\varepsilon = \pm 1$  e si effettua il cambio di variabile  $t = s|\xi|$ : poiché

$$\int_0^{+\infty} \widehat{\psi}_1(\varepsilon t) \widehat{\psi}_2(\varepsilon t) \frac{dt}{t} = C_{\psi_1, \psi_2}, \quad \varepsilon = \pm 1$$

si ha la tesi. □

**Corollario 6.11** (Calderon, Grossmann, Morlet). *Se  $\psi_1$  e  $\psi_2$  soddisfano le condizioni di ammissibilità (6.20) e (6.21), allora per ogni  $f \in L^2(\mathbb{R})$  si ha*

$$(6.22) \quad f = \frac{1}{C_{\psi_1, \psi_2}} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} W_{\psi_1} f(x, \xi) T_x D_s \psi_2 dx \frac{ds}{s^2},$$

ove l'uguaglianza vale in senso debole, ossia, per ogni  $h \in L^2(\mathbb{R})$

$$(6.23) \quad \langle f, h \rangle = \frac{1}{C_{\psi_1, \psi_2}} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} W_{\psi_1} f(x, \xi) \langle T_x D_s \psi_2, h \rangle dx \frac{ds}{s^2}.$$

Contrariamente al caso della STFT per la quale le relazioni di ortogonalità sono vere per ogni  $\psi_j$ , le ondine devono soddisfare delle **condizioni di ammissibilità**, quelle cioè espresse da (6.20) e (6.21). La (6.20) vale ogniqualvolta una tra  $\widehat{\psi}_1$  e  $\widehat{\psi}_2$  si annulla in un intorno dell'origine, e (6.21) vale per tutte le funzioni pari. Se  $\widehat{\psi}_1, \widehat{\psi}_2 \in L^1 \cap L^2$ , allora (6.20) di fatto implica che  $\widehat{\psi}_1(0) = f \psi_1 = 0$  oppure  $\widehat{\psi}_2(0) = f \psi_2 = 0$ . In particolare se  $\psi_1 = \psi_2$ , ossia se l'ondina di analisi  $\psi_1$  è la stessa dell'ondina di sintesi  $\psi_2$ , questa condizione è ovviamente soddisfatta. Perciò molti autori chiamano "wavelet" una funzione di  $L^2$  che soddisfi la condizione di media nulla.

Se allora  $\int \psi = 0$ , la trasformata  $W_\psi f(x, s)$  misura quanto cambia  $f$  in un intorno di  $x$  di ampiezza  $s$ . Se per esempio il supporto di  $\psi$  è l'intervallo  $I$  e  $f$  è costante nell'insieme  $x + sI$ , cioè sul supporto di  $T_x D_s \psi$ , allora  $W_\psi f(x, s) = 0$ . Siccome una funzione liscia cambia di poco intorno ad  $x$ , la sua WT dovrebbe essere piccola in  $x$ . Viceversa, una singolarità di  $f$  in  $x$  significa che  $f$  cambia molto intorno ad  $x$  e quindi la sua WT dovrebbe essere grande in  $x$ . Queste osservazioni danno una spiegazione intuitiva del fatto che la WT è un ottimo strumento per misurare la regolarità locale delle funzioni.

Concludiamo anche questa sezione con il calcolo dei rettangoli di Heisenberg associati alla WT. Supponiamo di scegliere un'ondina analizzante  $\psi$  che sia reale e pari, cosicché tale è anche  $\widehat{\psi}$ . Calcoliamo  $\sigma(\psi_{x,s})$  e  $\sigma(\widehat{\psi_{x,s}})$  nell'ipotesi  $\|\psi\|_2 = 1$ , dove

$$\psi_{x,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-x}{s}\right).$$

Per la media abbiamo:

$$\begin{aligned} \mu(\psi_{x,s}) &= \int t |\psi_{x,s}(t)|^2 dt \\ &= \int \frac{t}{s} \left| \psi\left(\frac{t-x}{s}\right) \right|^2 dt \\ &= \int \frac{(x+y)}{s} \left| \psi\left(\frac{y}{s}\right) \right|^2 dy \\ &= x \int \left| \psi\left(\frac{y}{s}\right) \right|^2 \frac{dy}{s} + \int y \left| \psi\left(\frac{y}{s}\right) \right|^2 \frac{dy}{s} \\ &= x \|\psi\|_2^2 + s \int z |\psi(z)|^2 dz \\ &= x. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \sigma^2(\psi_{x,s}) &= \int (t - \mu(\psi_{x,s}))^2 |\psi_{x,s}(t)|^2 dt \\ &= \int \frac{(t-x)^2}{s} \left| \psi\left(\frac{t-x}{s}\right) \right|^2 dt \\ &= \int y^2 \left| \psi\left(\frac{y}{s}\right) \right|^2 \frac{dy}{s} \\ &= s^2 \int z^2 |\psi(z)|^2 dz. \\ &= s^2 \sigma^2(\psi) \end{aligned}$$

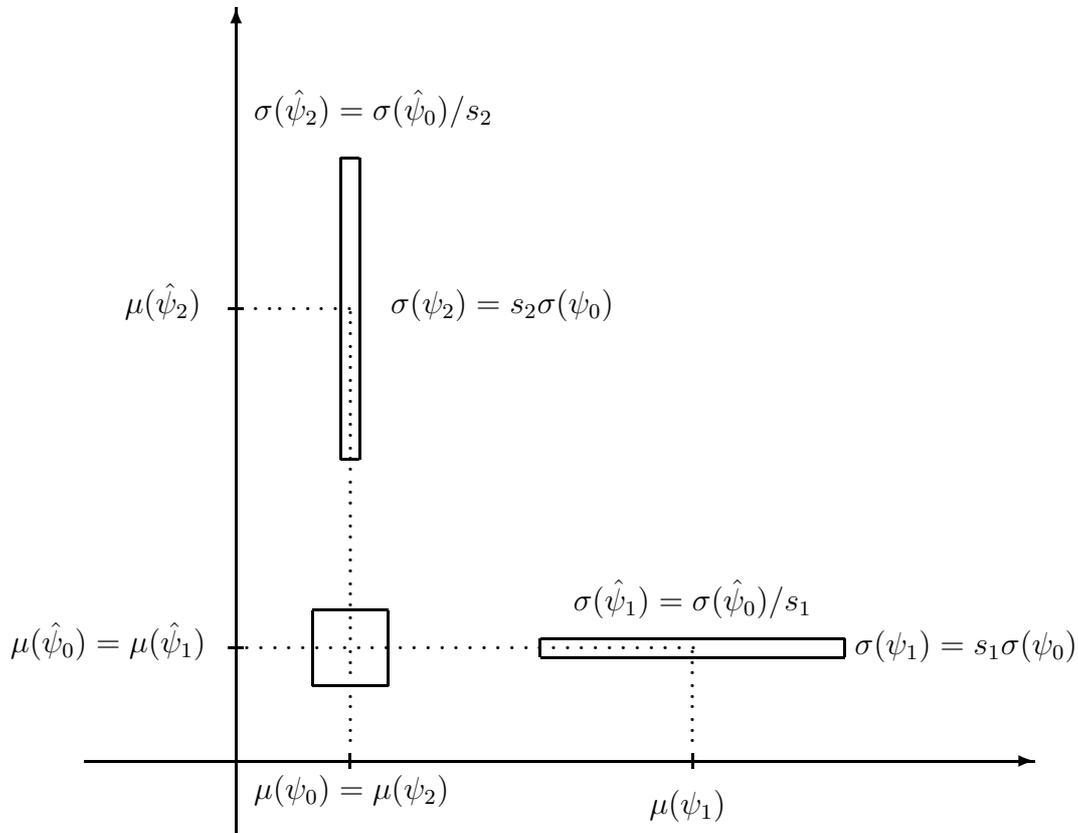
Siccome

$$\mathcal{F}(\psi_{x,s})(\omega) = \sqrt{s} \widehat{\psi}(s\omega) e^{-i\omega x},$$

otteniamo in modo del tutto analogo

$$\begin{aligned} \mu(\widehat{\psi_{x,s}}) &= \frac{1}{s} \mu(\widehat{\psi}), \\ \sigma^2(\widehat{\psi_{x,s}}) &= \frac{1}{s^2} \sigma^2(\widehat{\psi}). \end{aligned}$$

In conclusione, il rettangolo di Heisenberg associato a  $\psi_{x,s}$  è centrato in  $(x, \mu(\hat{\psi}))$  ed ha lati di lunghezze  $s\sigma(\psi)$  e  $\sigma(\hat{\psi})/s$  nelle direzioni rispettivamente dei tempi e delle frequenze.



Rettangoli di Heisenberg associati a  $s_1 = 1/4$  e  $s_2 = 4$ .

**6.4. La distribuzione di Wigner.** Sia la trasformata di Fourier a finestra mobile, sia la trasformata wavelet sono date dalle proiezioni del segnale lungo famiglie di atomi in tempo-frequenza. Quindi la risoluzione sia in tempo sia in frequenza di entrambe le trasformate è vincolata dalla risoluzione in tempo-frequenza degli atomi considerati. Idealmente si vorrebbe definire una densità di energia nel piano che non disperda l'energia del segnale né in tempo né in frequenza. La distribuzione di Wigner è una "densità di energia" nel piano tempo-frequenza che risulta dalle proiezioni del segnale lungo gli atomi che si ottengono a partire dal segnale stesso considerandone le traslazioni in tempo-frequenza.

Il termine "densità di energia" non è tuttavia appropriato perché la distribuzione di Wigner non è quasi mai positiva. Il termine rappresentazione quadratica in tempo-frequenza è più appropriato, ma è solo un modo più suggestivo di esprimere lo stesso concetto: lo scopo è quello di misurare quanta dell'energia del segnale in un certo

intervallo temporale è concentrata in un certo intervallo di frequenze. Per Plancherel

$$\|f\|_2^2 = \int |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi, \quad (n = 1).$$

Le quantità  $|f(t)|^2$  e  $|\hat{f}(\xi)|^2/2\pi$  possono quindi essere interpretate rispettivamente come densità di energia in tempo ed in frequenza. Quindi, se vogliamo trovare una densità di energia congiunta  $P(t, \xi)$ , essa dovrà necessariamente soddisfare le cosiddette proprietà marginali:

$$\int P(t, \xi) dt = |\hat{f}(\xi)|^2/2\pi, \quad \int P(t, \xi) d\xi = |f(t)|^2.$$

Prima di passare allo studio della distribuzione di Wigner, osserviamo che lo spettrogramma  $\text{Spec}_\psi f(x, \xi)$  di  $f$  rispetto ad una finestra  $\psi$ , definito in (6.5), soddisfa perlomeno tre proprietà che ci si aspetta da una densità di energia: esso è non-negativo, covariante e preserva l'energia (a meno di un fattore):

- $\text{Spec}_\psi f(x, \xi) \geq 0$  per definizione;
- $\text{Spec}_\psi (T_y M_\eta f)(x, \xi) = \text{Spec}_\psi f(x - y, \xi - \eta)$  per la Proposizione 6.5;
- $\|\text{Spec}_\psi f\|_1 = (2\pi)^{1/2} \|f\|_2$  per (6.15).

Si osservi che comunque  $\text{Spec}_\psi f(x, \xi)$  dipende dalla scelta della finestra  $\psi$  e quindi non è intrinseco al segnale  $f$  come invece si desidererebbe.

**Definizione 6.12.** *La distribuzione di Wigner  $Wf$  di una funzione  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$  è definita da*

$$Wf(x, \xi) = \int f\left(x + \frac{t}{2}\right) \overline{f\left(x - \frac{t}{2}\right)} e^{-it\xi} dt.$$

*Polarizzando questa espressione quadratica si ottiene la cosiddetta cross-Wigner per due funzioni  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ :*

$$W(f, g)(x, \xi) = \int f\left(x + \frac{t}{2}\right) \overline{g\left(x - \frac{t}{2}\right)} e^{-it\xi} dt.$$

Osserviamo subito che la distribuzione di Wigner  $Wf$  è a valori reali in quanto essa è, per ogni fissato  $x$  la trasformata di Fourier della funzione  $t \mapsto h_x(t) = f(x + \frac{t}{2}) \overline{f(x - \frac{t}{2})}$  che soddisfa  $h(-t) = \bar{h}(t)$ . La distribuzione di Wigner è legata molto strettamente alla STFT, come andiamo a verificare.

**Lemma 6.13.** *Per ogni  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$  si ha*

$$W(f, g)(x, \xi) = 2^d e^{2ix\xi} S_{\check{g}} f(2x, 2\xi),$$

dove  $\check{g}(x) = g(-x)$  è la riflessa di  $g$ .

DIMOSTRAZIONE. Mediante il cambio di variabile  $u = x + t/2$  otteniamo

$$\begin{aligned}
W(f, g)(x, \xi) &= \int f\left(x + \frac{t}{2}\right) \overline{g\left(x - \frac{t}{2}\right)} e^{-it\xi} dt \\
&= \int f(u) \overline{g(-(u-2x))} e^{-i2(u-x)\xi} 2^d du \\
&= 2^d e^{i2x\xi} \int f(u) \overline{\check{g}(u-2x)} e^{-iu(2\xi)} du \\
&= 2^d e^{i2x\xi} \langle f, M_{2\xi} T_{2x} \check{g} \rangle \\
&= 2^d e^{2ix\xi} S_{\check{g}} f(2x, 2\xi).
\end{aligned}$$

□

Mediante il risultato precedente possiamo trasferire sulla distribuzione di Wigner tutte le proprietà che già conosciamo della STFT.

**Proposizione 6.14.** *Siano  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ . La loro cross-Wigner soddisfa le seguenti proprietà:*

(a)  $W(f, g)$  è uniformemente continua e

$$\|W(f, g)\|_\infty \leq 2^d \|f\|_2 \|g\|_2.$$

(b) Per  $x, y, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^d$  si ha

$$\begin{aligned}
&W(T_y M_\alpha f, T_z M_\beta g)(x, \xi) \\
&= e^{\frac{i}{2}(y+z)(\beta-\alpha)} e^{ix(\alpha-\beta)} e^{-i\xi(y-z)} W(f, g) \left( x - \frac{y+z}{2}, \xi - \frac{\alpha+\beta}{2} \right).
\end{aligned}$$

In particolare,  $Wf$  è covariante, cioè

$$W(T_y M_\alpha f)(x, \xi) = Wf(x - y, \xi - \alpha).$$

(c)  $W(\hat{f}, \hat{g})(x, \xi) = (2\pi)^d W(f, g)(-\xi, x)$ .

(d) Vale la formula di Moyal:

$$\langle W(f_1, g_1), W(f_2, g_2) \rangle = (2\pi)^d \langle f_1, f_2 \rangle \overline{\langle g_1, g_2 \rangle}.$$

DIMOSTRAZIONE. (a) L'uniforme continuità segue dalla Proposizione 6.4, mentre la stima sulla norma si ottiene da Cauchy-Schwartz, tenendo conto di quanto visto nella dimostrazione del Lemma 6.13

$$|W(f, g)(x, \xi)| = |2^d e^{i2x\xi} \langle f, M_{2\xi} T_{2x} \check{g} \rangle| \leq 2^d \|f\|_2 \|g\|_2.$$

(b) Preliminarmente si osserva che

$$\begin{aligned}
(T_z M_\beta g)^\sim &= e^{-i\beta(x+z)} \check{g}(x+z) \\
S_{(T_z M_\beta g)^\sim} \varphi(q, p) &= e^{i\beta(z-q)} S_{\check{g}} \varphi(q-z, p-x),
\end{aligned}$$

come si dimostra con semplici passaggi a partire dalla definizione. Quindi, applicando il Lemma 6.13, (6.14) e le formule appena scritte si ottiene

$$\begin{aligned}
W(T_y M_\alpha f, T_z M_\beta g)(x, \xi) &= 2^d e^{2ix\xi} S_{(T_z M_\beta g)^\vee} (T_y M_\alpha f)(2x, 2\xi) \\
&= 2^d e^{2ix\xi} e^{-iy(2\xi)} S_{(T_z M_\beta g)^\vee} f(2x - y, 2\xi - \alpha) \\
&= 2^d e^{2ix\xi} e^{-iy(2\xi)} e^{i\beta(z-2x+y)} S_{\check{g}} f(2x - y - z, 2\xi - \alpha - \beta) \\
&= e^{i(2x\xi - 2y\xi + \beta(z-2x+y))} e^{-2i(x - \frac{y+z}{2})(\xi - \frac{\alpha+\beta}{2})} \times \\
&\quad \times 2^d e^{2i(x - \frac{y+z}{2})(\xi - \frac{\alpha+\beta}{2})} S_{\check{g}} f \left( 2 \left[ x - \frac{y+z}{2} \right], 2 \left[ \xi - \frac{\alpha+\beta}{2} \right] \right).
\end{aligned}$$

Utilizzando ancora il Lemma 6.13 per il termine che compare nel secondo rigo e riscrivendo l'esponente al primo rigo si perviene alla formula desiderata.

(c) Innanzitutto osserviamo che  $(\hat{g})^\vee = (\check{g})^\wedge$ . Dal Lemma 6.13 e dalla formula di Parseval si ha quindi

$$\begin{aligned}
W(\hat{f}, \hat{g})(x, \xi) &= 2^d e^{2ix\xi} \langle \hat{f}, M_{2\xi} T_{2x}(\hat{g})^\vee \rangle \\
&= 2^d e^{2ix\xi} \langle \hat{f}, M_{2\xi} T_{2x}(\check{g})^\wedge \rangle \\
&= 2^d e^{2ix\xi} \langle \hat{f}, (T_{-2\xi} M_{2x} \check{g})^\wedge \rangle \\
&= 2^d e^{2ix\xi} (2\pi)^d \langle f, T_{-2\xi} M_{2x} \check{g} \rangle \\
&= 2^d e^{2ix\xi} (2\pi)^d \langle f, e^{4ix\xi} M_{2x} T_{-2\xi} \check{g} \rangle \\
&= (2\pi)^d 2^d e^{-2ix\xi} \langle f, M_{2x} T_{-2\xi} \check{g} \rangle \\
&= (2\pi)^d W(f, g)(-\xi, x),
\end{aligned}$$

avendo anche tenuto conto delle relazioni di commutazione  $T_{-2\xi} M_{2x} = e^{4ix\xi} M_{2x} T_{-2\xi}$ .

(d) La formula di Moyal è una conseguenza delle relazioni di ortogonalità per la STFT. Infatti, riconducendoci ancora alla STFT per mezzo del Lemma 6.13, otteniamo

$$\begin{aligned}
\langle W(f_1, g_1), W(f_2, g_2) \rangle &= \iint W(f_1, g_1)(x, \xi) \overline{W(f_2, g_2)(x, \xi)} d\xi dx \\
&= 2^{4d} \iint S_{\check{g}_1} f_1(2x, 2\xi) \overline{S_{\check{g}_2} f_2(2x, 2\xi)} d\xi dx \\
&= \iint S_{\check{g}_1} f_1(x, \xi) \overline{S_{\check{g}_2} f_2(x, \xi)} d\xi dx \\
&= \langle S_{\check{g}_1} f_1, S_{\check{g}_2} f_2 \rangle \\
&= (2\pi)^d \langle f_1, f_2 \rangle \overline{\langle \check{g}_1, \check{g}_2 \rangle} \\
&= (2\pi)^d \langle f_1, f_2 \rangle \overline{\langle g_1, g_2 \rangle}.
\end{aligned}$$

□

Possiamo ora provare che  $Wf$  soddisfa le proprietà marginali, a meno di una costante moltiplicativa.

**Proposizione 6.15.** *Se  $f, \hat{f} \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ , allora*

$$(6.24) \quad \int Wf(x, \xi) dx = |\hat{f}(\xi)|^2$$

$$(6.25) \quad \int Wf(x, \xi) d\xi = (2\pi)^d |f(x)|^2.$$

*In particolare,*

$$(6.26) \quad \iint Wf(x, \xi) dx d\xi = (2\pi)^d \|f\|_2^2.$$

DIMOSTRAZIONE. Riscriviamo la (c) della Proposizione 6.14 per  $f = g$

$$Wf(x, \xi) = (2\pi)^{-d} W\hat{f}(\xi, -x) = (2\pi)^{-d} \iint \hat{f}\left(\xi + \frac{t}{2}\right) \overline{\hat{f}\left(\xi - \frac{t}{2}\right)} e^{itx} dt.$$

La formula di inversione dice quindi che per ogni fissato  $\xi$  la trasformata di Fourier della funzione  $x \mapsto Wf(x, \xi)$  nel punto  $t$  è

$$\hat{f}\left(\xi + \frac{t}{2}\right) \overline{\hat{f}\left(\xi - \frac{t}{2}\right)}.$$

Siccome l'integrale di una funzione non è altro che il valore della sua trasformata di Fourier nell'origine, l'integrale di  $Wf(x, \xi)$  rispetto a  $dx$  è il valore della funzione precedente per  $t = 0$ , cioè  $|\hat{f}(\xi)|^2$ .

Similmente, la formula che definisce la Wigner, cioè

$$Wf(x, \xi) = \int f\left(x + \frac{t}{2}\right) \overline{f\left(x - \frac{t}{2}\right)} e^{-it\xi} dt$$

mostra che per ogni fissato  $x$ , la trasformata di Fourier della funzione

$$t \mapsto f\left(x + \frac{t}{2}\right) \overline{f\left(x - \frac{t}{2}\right)}$$

nel punto  $\xi$  è necessariamente  $Wf(x, \xi)$ . Siccome, per la formula di inversione, l'integrale della trasformata di Fourier è uguale a  $(2\pi)^d$ -volte il valore della funzione nell'origine, l'integrale  $Wf(x, \xi)$  rispetto a  $d\xi$  è esattamente  $(2\pi)^d |f(x)|^2$ .  $\square$

Come già accennato in precedenza, la distribuzione di Wigner non soddisfa una proprietà chiave delle funzioni che possano svolgere il ruolo di densità di probabilità: l'essere positive. In effetti per la funzione caratteristica  $\chi_{[-a,a]}$  risulta

$$W\chi_{[-a,a]}(x, \xi) = \frac{2 \sin(2(a - |x|)\xi)}{\xi} \chi_{[-a,a]}(x),$$

una funzione oscillante che assume infiniti valori negativi.

Lungi dall'essere un caso eccezionale, l'esempio precedente è piuttosto la regola. Citiamo, senza dimostrazione, il seguente risultato di Hudson di natura del tutto generale.

**Teorema 6.16** (Hudson[H]). *Sia  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ . Allora  $Wf(x, \xi) > 0$  per ogni  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2d}$  se e solo se  $f$  è una Gaussiana generalizzata della forma*

$$f(x) = e^{-x \cdot Ax + 2b \cdot x + c},$$

dove  $A \in GL(d, \mathbb{C})$  con parte reale definita positiva,  $b \in \mathbb{C}^d$  e  $c \in \mathbb{C}$ .

## BIBLIOGRAFIA

- [C] L. Cohen, *Time-frequency Analysis*. Prentice Hall, New Jersey, 1995.
- [D] I. Daubechies, *Ten lectures on wavelets*. SIAM, Philadelphia, 1992.
- [EP] C. Epstein, *The Mathematics of Medical Imaging*. Prentice Hall 2001 (in stampa).
- [F1] G. Folland, *Introduction to Partial Differential Equations*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1976.
- [F2] G. Folland, *Fourier Analysis and its Applications*. Brooks/Cole Publishing Company, Pacific Grove, California, 1992.
- [F3] G. Folland, *Real Analysis*. John Wiley & Sons, New York, 1999.
- [H] R. L. Hudson, *When is the Wigner quasi-probability density non-negative?* Rep. Mathematical Phys., 6(2), 249-252, 1974.
- [M] S. Mallat, *A wavelet tour of signal processing*. Academic Press, San Diego, 1998.
- [Gra] L. Grafakos, *Classical and modern Fourier Analysis*. Pearson Prentice Hall, New Jersey, 2003.
- [Gro] K. Gröchenig, *Foundations of Time-Frequency Analysis*. Birkhäuser, Boston, 2001.
- [R1] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1976.
- [R2] W. Rudin, *Functional Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1973.
- [Sch] L. Schwartz, *Théorie des Distributions* (2nd ed.), Hermann, Paris (1966).
- [SS] E. M. Stein and R. Shakarchi, *Fourier Analysis, an introduction*. Princeton University Press, Princeton, 2003.
- [SW] E. M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*. Princeton University Press, Princeton, 1971.

FILIPPO DE MARI, DIPEM, UNIVERSITÀ DI GENOVA  
E-mail address: demari@dima.unige.it